

MODEL PENGENDALIAN PENYEBARAN HIV/AIDS DI KALANGAN IDUs (*INJECTING DRUG USERS*) DENGAN NEP (*NEEDLE EXCHANGE PROGRAM*)

Isnaini Mahuda

Sekolah Tinggi Ilmu Ekonomi Bina Bangsa
Email: isnainimahuda1990@gmail.com

Abstract: The spread of HIV/AIDS among IDUs (Injecting Drug Users) has become a global problem that need to be overcome seriously. Sharing needles among IDUs is a major factor in raising the endemic HIV/AIDS. NEP (Needle Exchange Program) as one of the Harm Reduction Program distribute sterile needle to IDUs in order that they can still inject safely. Model of spread of HIV/AIDS among IDUs involving the NEP intervention as a control is discussed here. This model consists of nine compartments that are classified into seven IDUs compartments namely susceptible (non-treatment and treatment), exposed (non-treatment and treatment), infected (non-treatment and treatment), AIDS and two needles compartments. Disease-free and endemic equilibrium points of the model are obtained from model analysis. Basic reproductive ratio is derived from the spectral radius of the Next Generation Matrix (NGM), but in this case it is impossible to determine analytically. At the end, numerical simulation is performed to find out the dynamics of IDUs population which infected by HIV/AIDS.

Keywords: *HIV/AIDS, Injecting Drug Users (IDUs), Needle Exchange Program (NEP), Basic Reproduction Ratio, Next Generation Matrix (NGM).*

Abstrak: Penyebaran HIV/AIDS di kalangan IDUs (*Injecting Drug Users*) telah menjadi masalah global yang perlu ditangani secara serius. Penggunaan jarum suntik secara bergantian di kalangan IDUs menjadi faktor utama dalam mendorong terjadinya endemik HIV/AIDS. NEP (*Needle Exchange Program*) sebagai salah satu dari program *Harm Reduction* hadir untuk memberikan jarum suntik steril kepada IDUs agar mereka dapat tetap menyuntik secara aman. Model penyebaran HIV/AIDS di kalangan IDUs dengan melibatkan adanya intervensi NEP sebagai bentuk pengendaliannya dibahas pada penelitian ini. Model yang dibentuk terdiri dari 9 kompartemen yang diklasifikasikan menjadi 7 kompartemen IDUs yaitu *susceptible* (non-treatment dan treatment), *exposed* (non-treatment dan treatment), *infected* (non-treatment dan treatment), dan AIDS serta 2 kompartemen jarum. Titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik diperoleh dari hasil analisis model. *Basic reproductive ratio* diperoleh dengan mencari spektral radius dari *Next Generation Matrix (NGM)*, namun pada kasus ini tidak mungkin untuk ditentukan secara analitik. Pada bagian akhir dilakukan simulasi numerik untuk melihat dinamika dari populasi IDUs yang terinfeksi HIV/AIDS.

Kata kunci: *HIV/AIDS, Injecting Drug Users (IDUs), Needle Exchange Program (NEP), Basic Reproduction Ratio, Next Generation Matrix (NGM).*

PENDAHULUAN

HIV (*Human Immunodeficiency Virus*) merupakan virus yang menyebar melalui cairan tubuh manusia dan mempengaruhi kerja sel-sel tertentu dari sistem kekebalan tubuh. Sel CD4 atau yang dikenal dengan sel-T adalah sel yang diserang oleh virus ini sehingga

mengakibatkan daya tahan tubuh manusia menjadi berkurang. Seiring dengan berjalannya waktu, sel-sel yang diserang tersebut menjadi rusak sehingga tubuh tidak dapat melawan infeksi yang disebabkan oleh virus ini. Ketika itu terjadi maka orang yang terinfeksi HIV akan mengidap penyakit AIDS, yang merupakan fase terakhir dari infeksi HIV.

Kasus infeksi HIV serta penyebaran penyakit AIDS bukan suatu kasus baru dalam dunia kesehatan. Setelah hampir lebih dari 30 tahun sejak kasus HIV pertama terdeteksi, epidemi HIV masih menjadi masalah kesehatan global yang memerlukan penanganan yang serius. Pada tahun 2010, diperkirakan sekitar 34 juta orang di dunia terjangkit HIV dan sekitar 1.8 juta orang meninggal karena AIDS [1].

Penularan HIV dapat terjadi akibat melakukan hubungan seks baik heteroseksual maupun homoseksual dengan penderita HIV, pemakaian jarum suntik secara bergantian di kalangan *Injecting Drug Users* (IDUs), melalui transfusi darah dan transmisi perinatal. Diantara cara penularan HIV tersebut yang memberikan kontribusi cukup besar dalam terjadinya endemik HIV adalah melalui penggunaan jarum suntik secara bergantian di kalangan IDUs (*Injecting Drug Users*). IDUs atau dikenal sebagai pengguna narkoba suntik merupakan komunitas yang rawan terinfeksi HIV. Transmisi virus melalui jarum suntik yang terkontaminasi dapat terjadi ketika jarum suntik tersebut digunakan secara bergantian di kalangan IDUs. *The Indonesian Behavioral Surveillance Survey* (BSS) pada tahun 2004-2005 menunjukkan bahwa IDUs cenderung berkumpul dalam kelompok untuk menyuntik dengan ukuran rata-rata 7 - 14 orang di setiap kelompok. Lebih dari setengah IDUs yang disurvei pernah berbagi jarum dan hanya 12-15% dari IDUs yang diteliti melaporkan bahwa mereka selalu menggunakan jarum mereka sendiri. Beberapa penelitian telah melaporkan bahwa IDUs sering tidak membersihkan jarum atau bahkan tidak tahu bagaimana membersihkan jarum suntik yang benar sebelum digunakan kembali. Selain itu, sebagian besar dari mereka juga sering berbagi jarum meskipun tahu bahwa HIV ditularkan melalui jarum [2].

Needle Exchange Program (NEP) atau program pertukaran jarum merupakan salah satu upaya yang dapat dilakukan dalam rangka mengurangi penyebaran HIV di kalangan IDUs. Dengan memberikan jarum yang steril dapat menghilangkan resiko penularan HIV melalui darah yang tersisa di jarum yang non-steril. Di Australia, program ini secara signifikan mampu mengurangi penyebaran HIV di kalangan IDUs [3]. Begitupun di negara-negara lainnya telah membuktikan bahwa NEP dapat mengurangi penyebaran HIV di kalangan IDUs. Di Indonesia, pemerintah didukung oleh LSM, Puskesmas dan Rumah Sakit telah mengimplementasikan program ini sejak tahun 1998. Namun dalam prakteknya masih banyak ditemukan kendala dalam mengimplementasikan program ini. Diantaranya yaitu, program ini hanya bisa dijangkau oleh kelompok-kelompok minoritas IDUs. Beberapa kelompok IDUs masih sangat tertutup sehingga sulit untuk menjangkau mereka. Selain itu, masih banyak IDUs yang merasa enggan untuk mengakses jarum steril yang disediakan oleh LSM, Puskesmas, ataupun Rumah Sakit [4].

Permodelan matematika seputar penyebaran infeksi HIV/AIDS di kalangan IDUs sudah banyak dilakukan. Kaplan [5] pertama kali memodelkan transmisi HIV melalui sharing jarum suntik dan peralatan suntik lainnya di '*shooting galleries*'. Kaplan mengasumsikan bahwa populasi IDUs homogen dan IDUs hanya menyuntik di '*shooting galleries*'. '*Shooting galleries*' adalah tempat dimana IDUs berkumpul untuk berbagi jarum suntik. Berikutnya, Greenhalgh [6] memodifikasi model Kaplan dengan mengasumsikan populasi IDUs heterogen. Dalam modelnya, Greenhalgh membedakan IDUs menjadi dua katagori, IDUs

yang terinfeksi dan dia tahu bahwa dirinya terinfeksi dan IDUs yang terinfeksi tetapi dia tidak tahu bahwa dirinya telah terinfeksi. Model ini terus berkembang hingga saat ini bahkan dilengkapi dengan analisis penanggulangannya seperti pada [7],[8].

Berdasarkan latar belakang tersebut maka penulis merumuskan beberapa rumusan masalah diantaranya yaitu bagaimana konstruksi model penyebaran HIV/AIDS di kalangan IDUs dengan intervensi NEP, bagaimana menentukan titik kesetimbangan dan analisis kestabilan model matematika yang telah dikonstruksi dan bagaimana simulasi numerik model dari beberapa parameter beserta interpretasinya.

METODE

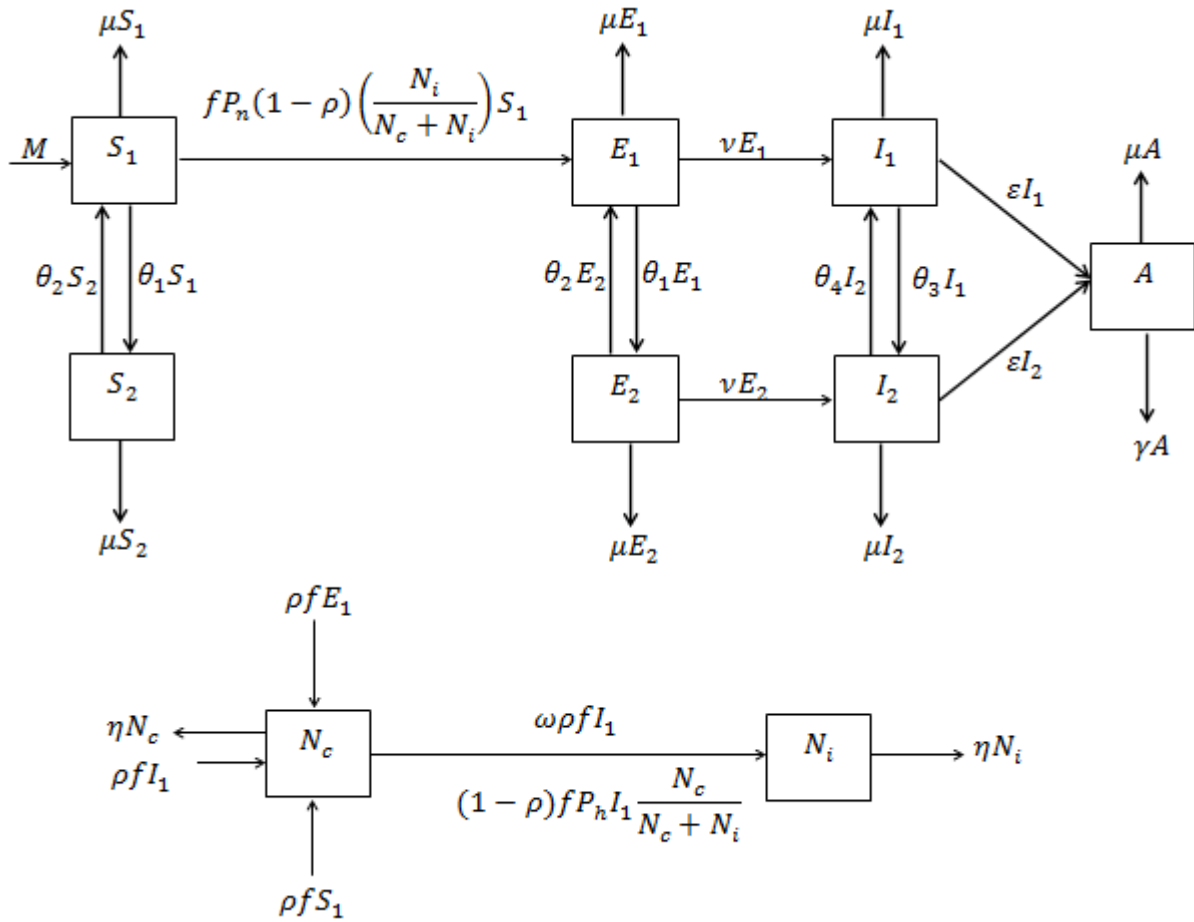
Adapun metode yang digunakan adalah studi pustaka, studi matematika meliputi pembentukan model, analisa eksistensi dan kestabilan titik kesetimbangan. Kemudian dilakukan studi komputasi untuk melihat simulasi numerik dari model yang telah di analisis menggunakan bantuan software Maple.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Ada dua populasi utama dalam model ini, yaitu populasi IDUs yang meliputi susceptible, exposed, infected, and AIDS serta populasi jarum yang meliputi jarum susceptible dan infected. Adapun asumsi-asumsi yang digunakan dalam model ini adalah:

1. Populasi IDUs bersifat konstan (tidak ada proses migrasi).
2. Setiap IDUs yang masuk ke dalam populasi merupakan IDUs yang susceptible.
3. Semua pemakaian bersama (sharing) jarum suntik di kalangan IDUs terjadi di satu galeri.
4. Penularan HIV/AIDS terjadi akibat penggunaan jarum suntik yang terinfeksi.
5. Jarum suntik menjadi terinfeksi apabila digunakan oleh IDUs yang terinfeksi.
6. Tidak ada treatment antiretroviral kepada penderita HIV.
7. IDUs yang mengikuti treatment (NEP) telah memiliki kesadaran untuk tidak memakai jarum suntik secara bersamaan.
8. Jarum suntik yang telah dipakai beberapa kali akan hilang ketajamannya dan tidak lagi dipergunakan oleh IDUs.
9. Terdapat sejumlah IDUs non treatment dengan peluang sebesar ρ yang membawa 1 buah jarum suntik baru untuk dipergunakan sendiri kemudian meninggalkannya di galeri.
10. IDUs terinfeksi yang membawa jarum baru ke galeri memiliki peluang sebesar ω untuk menginfeksi jarum yang dipakainya.

Dari asumsi-asumsi di atas maka dapat dikonstruksi model matematika penyebaran HIV/AIDS di kalangan IDUs. Dalam model ini terdapat 9 kompartemen yang terdiri dari 7 kompartemen IDUs dan 2 kompartemen jarum. 7 kompartemen IDUs meliputi 3 kompartemen IDUs non treatment yaitu IDUs susceptible non treatment (S_1), IDUs exposed non treatment (E_1), IDUs infected non treatment (I_1), 3 kompartemen IDUs dengan treatment yaitu IDUs susceptible dengan treatment (S_2), IDUs exposed dengan treatment (E_2), IDUs infected dengan treatment (I_2), dan 1 kompartemen IDUs dengan AIDS (A). 2 kompartemen jarum suntik yaitu jarum suntik susceptible (N_c) dan jarum suntik infected (N_i). Diagram transmisi untuk model penyebaran HIV/AIDS di kalangan IDUs dapat dilihat pada Gambar 1.



Gambar 1. Diagram transmisi penyebaran HIV/AIDS di kalangan IDUs.

Model matematika dari diagram tranmisi pada Gambar 1 dapat diekspresikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 \frac{dS_1}{dt} &= M - fP_n(1 - \rho) \left(\frac{N_i}{N_c + N_i} \right) S_1 + \theta_2 S_2 - (\theta_1 + \mu) S_1. \\
 \frac{dE_1}{dt} &= fP_n(1 - \rho) \left(\frac{N_i}{N_c + N_i} \right) S_1 + \theta_2 E_2 - (\theta_1 + \mu + \nu) E_1. \\
 \frac{dI_1}{dt} &= \nu E_1 - (\theta_3 + \mu + \varepsilon) I_1 + \theta_4 I_2. \\
 \frac{dS_2}{dt} &= \theta_1 S_1 - \theta_2 S_2 - \mu S_2. \\
 \frac{dE_2}{dt} &= \theta_1 E_1 - (\theta_2 + \mu + \nu) E_2. \\
 \frac{dI_2}{dt} &= \nu E_2 + \theta_3 I_1 - (\theta_4 + \mu + \varepsilon) I_2. \\
 \frac{dA}{dt} &= (I_1 + I_2) \varepsilon - (\mu + \gamma) A. \\
 \frac{dN_c}{dt} &= \rho f S_1 + \rho f E_1 + \rho(1 - \omega) f I_1 - (1 - \rho) f P_h I_1 \frac{N_c}{N_c + N_i} - \eta N_c.
 \end{aligned} \tag{1}$$

$$\frac{dN_i}{dt} = \rho\omega f I_1 + (1 - \rho)f P_h I_1 \frac{N_c}{N_c + N_i} - \eta N_i.$$

Adapun keterangan mengenai variabel dan parameter yang digunakan dalam model ini disajikan dalam table 1 berikut:

Tabel 1. Variabel dan parameter model penyebaran HIV/AIDS di kalangan IDUs.

Variable/ Parameter	Deskripsi	Satuan
S_1	IDUs susceptible non treatment	Orang
E_1	IDUs Exposed non treatment	Orang
I_1	IDUs Infected non treatment	Orang
S_2	IDUs susceptible dengan treatment	Orang
E_2	IDUs Exposed dengan treatment	Orang
I_2	IDUs Infected dengan treatment	Orang
A	IDUs dengan AIDS	Orang
N_c	Jarum suntik susceptible	Unit
N_i	Jarum suntik infeted	Unit
M	Laju rekrutmen IDUs	Orang /hari
μ	Laju kematian	1/hari
ν	Laju transisi dari Exposed ke HIV	1/hari
ε	Laju transisi dari HIV ke AIDS	1/hari
η	Laju pembuangan jarum	Unit/hari
γ	Laju kematian karena AIDS	1/hari
θ_1	Laju IDUs susceptible dan exposed yang mengikuti NEP	1/hari
θ_2	Laju IDUs susceptible dan exposed yang keluar dari NEP	1/hari
θ_3	Laju IDUs infected yang mengikuti NEP	1/hari
θ_4	Laju IDUs infected yang keluar dari NEP	1/hari
f	Frekuensi menyuntik	Unit/orang*hari
P_n	Peluang sukses infeksi dari jarum terinfeksi ke IDUs susceptible	-
P_h	Peluang sukses infeksi dari IDUs terinfeksi ke jarum suntik susceptible	-
ρ	Peluang seorang IDUs membawa jarum suntik baru	-
ω	Peluang terinfeksi jarum bersih yang dibawa oleh IDUs yang terinfeksi	-

ANALISA MODEL

Titik-titik kesetimbangan model penyebaran HIV/AIDS di kalangan IDUs akan ditentukan pada daerah feasible yang dinotasikan dengan Ω atau daerah yang memiliki arti biologi sebagai berikut:

$$\Omega = \{(S_1, E_1, I_1, S_2, E_2, I_2, A, N_c, N_i) \in \mathbb{R}_+^9 | S_1, E_1, I_1, S_2, E_2, I_2, A, N_c, N_i \geq 0\}.$$

Titik kesetimbangan adalah titik dimana sudah tidak terjadi lagi perubahan terhadap solusi atau solusi sudah mencapai keadaan konstan (setimbang). Titik kesetimbangan diperoleh ketika semua persamaan pada sistem (1) bernilai nol. Terdapat dua jenis titik kesetimbangan

pada model ini yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik. Titik kesetimbangan bebas penyakit dari sistem (1) adalah

$$DFE = (S_1, 0, 0, S_2, 0, 0, 0, N_c, 0)$$

dengan

$$S_1 = \frac{(\mu + \theta_2)M}{\mu(\theta_1 + \mu + \theta_2)}, \quad S_2 = \frac{\theta_1 M}{\mu(\theta_1 + \mu + \theta_2)}, \quad N_c = \frac{\rho f(\mu + \theta_2)M}{\mu(\theta_1 + \mu + \theta_2)\eta}.$$

Titik DFE ini diinterpretasikan sebagai titik kesetimbangan dimana hanya populasi IDUs susceptible dan jarum susceptible saja yang bernilai positif sedangkan populasi IDUs yang terinfeksi dan AIDS serta jarum suntik yang terinfeksi bernilai 0. Titik kesetimbangan endemik dari sistem (1) adalah

$$END = (S_1, E_1, I_1, S_2, E_2, I_2, A, N_c, N_i).$$

Ekspresi semua variabel pada titik kesetimbangan endemik terlalu kompleks untuk ditampilkan dalam bentuk eksplisit. Namun ketika bergantung pada variabel E_2 dapat dituliskan sebagai berikut:

$$E_1 = \frac{(\mu + \nu + \theta_2)E_2}{\theta_1}.$$

$$I_1 = \frac{(\mu\theta_2 + \theta_2\theta_4 + \nu\theta_4 + \mu\theta_4 + \theta_1\theta_4 + \mu\varepsilon + \nu\varepsilon + \mu^2 + \nu\mu + \theta_2\varepsilon)\nu E_2}{\theta_1(\mu^2 + \mu\theta_4 + 2\mu\varepsilon + \varepsilon\theta_4 + \varepsilon^2 + \mu\theta_3 + \theta_3\varepsilon)}.$$

$$I_2 = \frac{(\mu\theta_3 + \theta_2\theta_3 + \nu\theta_3 + \mu\theta_1 + \theta_1\theta_3 + \varepsilon\theta_1)\nu E_2}{\theta_1(\mu^2 + \mu\theta_4 + 2\mu\varepsilon + \varepsilon\theta_4 + \varepsilon^2 + \mu\theta_3 + \theta_3\varepsilon)}.$$

$$A = \frac{(\mu + \nu + \theta_2 + \theta_1)\nu\varepsilon E_2}{(\mu + \gamma)(\mu + \varepsilon)\theta_1}.$$

Khususnya untuk variabel S_1, S_2 masih terlalu kompleks untuk ditampilkan secara eksplisit jika hanya bergantung pada E_2 sehingga harus bergantung pada variabel lain yaitu E_1 .

$$S_1 = \frac{(M + \theta_2 E_2 - (\mu + \nu + \theta_1)E_1)(\mu + \theta_2)}{\mu(\mu + \theta_1 + \theta_2)}.$$

$$S_2 = \frac{(M + \theta_2 E_2 - (\mu + \nu + \theta_1)E_1)\theta_1}{\mu(\mu + \theta_1 + \theta_2)}.$$

Sedangkan untuk variabel N_c, N_i harus bergantung pada variabel S_1, E_1, I_1 sehingga bentuknya adalah,

$$N_c = \frac{f\rho^2(In_1^2(1 - \omega) + (S_1 + E_1)(2 - \omega)I_1 + (S_1 + E_1)^2)}{\eta(I_1(\rho + p_h - p_h\rho) + \rho(S_1 + E_1))}.$$

$$N_i = \frac{(\rho\omega + p_h - p_h\rho)(I_1 + S_1 + E_1)f\rho I_1}{\eta(I_1(\rho + p_h - p_h\rho) + \rho(S_1 + E_1))}.$$

Dan untuk variabel E_2 secara eksplisit dapat ditulis sebagai:

$$E_2 = \frac{M\theta_1\rho K_4(\mathcal{R}_1 - 1)}{K_1[\mu K_2(1 - \rho)\delta_1\nu p_h + \mu\rho K_2(\delta_2\theta_4 + K_3) + \rho K_4(\mathcal{R}_1 - 1)]}.$$

dengan

$$K_1 = (\mu + \nu)(\mu + \nu + \theta_2 + \theta_1)(\mu + \theta_2 + \theta_1).$$

$$K_2 = (\mu + \theta_2 + \theta_1).$$

$$K_3 = (\mu + \varepsilon)(\mu + \varepsilon + \theta_3 + \nu)(\mu + \theta_2 + \nu).$$

$$K_4 = (\mu + \theta_2)(\mu + \varepsilon)(\mu + \theta_3 + \varepsilon + \theta_4)(\mu + \nu)(\mu + \theta_1 + \nu + \theta_2).$$

$$\delta_1 = (\mu + \theta_1 + \theta_2 + \nu)\theta_4 + (\mu + \varepsilon)(\mu + \theta_2 + \nu).$$

$$\delta_2 = \nu\theta_1 + (\nu + \varepsilon + \mu)\theta_2 + (\mu + \nu)(\nu + \varepsilon + \mu).$$

$$R_1 = \frac{\nu p_n(1 - \rho)(\rho\omega - p_h\rho + p_h)\delta_1 f}{\rho(\mu + \varepsilon)(\mu + \varepsilon + \theta_4 + \theta_3)(\mu + \nu)(\mu + \theta_2 + \nu + \theta_1)}.$$

Eksistensi titik kesetimbangan endemik terpenuhi ketika populasi IDUs susceptible, exposed, HIV dan AIDS baik yang non-treatment maupun yang treatment serta populasi jarum suntik susceptible dan infected bernilai positif. Karena semua ekspresi variabel pada titik kesetimbangan endemik bergantung pada E_2 maka eksistensi titik kesetimbangan endemik diperoleh ketika $E_2 > 0$. Agar $E_2 > 0$ maka haruslah $(R_1 - 1) > 0$ sehingga $R_1 > 1$.

Kestabilan titik kesetimbangan bebas penyakit dapat ditentukan berdasarkan nilai karakteristik dari matriks Jacobi sistem. Pelinearan sistem (1) disekitar titik kesetimbangan bebas penyakit

$$\begin{aligned} DFE &= (S_1, E_1, I_1, S_2, E_2, I_2, A, N_c, N_i) = (S_1, 0, 0, S_2, 0, 0, 0, N_c, 0) \\ &= \left(\frac{(\mu + \theta_2)M}{\mu(\theta_1 + \mu + \theta_2)}, 0, 0, \frac{\theta_1 M}{\mu(\theta_1 + \mu + \theta_2)}, 0, 0, 0, \frac{\rho f(\mu + \theta_2)M}{\mu(\theta_1 + \mu + \theta_2)\eta}, 0 \right). \end{aligned}$$

Menghasilkan matriks Jacobi:

$$Jac = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \theta_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & K \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 & \theta_2 & 0 & 0 & 0 & L \\ 0 & \nu & a_{33} & 0 & 0 & \theta_4 & 0 & 0 & 0 \\ \theta_1 & 0 & 0 & a_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \theta_1 & 0 & 0 & a_{55} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \theta_3 & 0 & \nu & a_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon & 0 & 0 & \varepsilon & a_{77} & 0 & 0 \\ f\rho & f\rho & M & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{88} & 0 \\ 0 & 0 & N & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{99} \end{pmatrix} \quad (2)$$

dengan, $a_{11} = -\theta_1 - \mu$, $a_{22} = -\theta_1 - \mu - \nu$, $a_{33} = -\theta_3 - \mu - \varepsilon$, $a_{44} = -\theta_2 - \mu$,
 $a_{55} = -\mu - \theta_2 - \nu$, $a_{66} = -\theta_4 - \mu - \varepsilon$, $a_{77} = -\mu - \gamma$, $a_{88} = a_{89} = -\eta$,

$$K = -\frac{p_n(1-\rho)\eta}{\rho}, \quad L = \frac{p_n(1-\rho)\eta}{\rho},$$

$$M = \rho(1-\omega)f - (1-\rho)p_h f, \quad N = \rho\omega f + (1-\rho)p_h f.$$

Nilai karakteristik dari matriks (2) adalah

$$\lambda_1 = -\mu, \lambda_2 = -(\mu + \theta_1 + \theta_2), \lambda_3 = -\eta \text{ dan } \lambda_4 = -(\mu + \gamma).$$

Sedangkan $\lambda_5, \lambda_6, \lambda_7, \lambda_8, \lambda_9$ merupakan akar-akar dari persamaan

$$\lambda^5 + a_1\lambda^4 + a_2\lambda^3 + a_3\lambda^2 + a_4\lambda + a_5 = 0. \quad (3)$$

Titik kesetimbangan bebas penyakit akan bersifat stabil jika semua akar dari polinom (3) bernilai negatif. Dari polinom (3) di atas dapat diketahui bahwa syarat cukup agar titik kesetimbangan ini stabil adalah $a_5 > 0$, dengan

$$a_5 = \eta(\mu + \varepsilon)(\mu + \theta_4 + \varepsilon + \theta_3)(\mu + \nu)(\mu + \theta_2 + \nu + \theta_1)(1 - R_1),$$

dimana,

$$R_1 = \frac{\nu p_n(1-\rho)(\rho\omega - p_h\rho + p_h)(\mu + \theta_1 + \theta_2 + \nu)\theta_4 + (\mu + \varepsilon)(\mu + \theta_2 + \nu)f}{\rho(\mu + \varepsilon)(\mu + \varepsilon + \theta_4 + \theta_3)(\mu + \nu)(\mu + \theta_2 + \nu + \theta_1)}$$

$a_5 > 0$ ketika $R_1 < 1$.

Basic reproductive ratio merupakan parameter yang penting dalam epidemiologi penyakit menular. Parameter ini dapat merepresentasikan banyaknya kasus sekunder yang diakibatkan oleh satu kasus primer dalam populasi virgin selama periode infeksi [9]. *Basic reproductive ratio* biasanya dinotasikan sebagai R_0 . Ada beberapa metode untuk menentukan R_0 . Pada penelitian ini, R_0 diperoleh dengan cara membangun sebuah matriks yang disebut sebagai *Next Generation Matriks* (NGM). R_0 merupakan nilai karakteristik terbesar dari polinom karakteristik NGM. R_0 mempunyai nilai ambang batas 1, artinya jika $R_0 > 1$ maka akan terjadi endemik yang ditandai dengan meningkatnya populasi yang terinfeksi. Namun jika $R_0 < 1$ maka tidak terjadi endemik. *Next Generation Matrix* atau yang disimbolkan dengan K dari sistem (1) dapat diformulasikan sebagai berikut:

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\theta_2}{\mu + \theta_2 + \nu} & 0 & \frac{p_n(1-\rho)}{\rho} \\ \frac{\nu}{\mu + \theta_1 + \nu} & 0 & 0 & \frac{\theta_4}{\mu + \theta_4 + \varepsilon} & 0 \\ \frac{\theta_1}{\mu + \theta_1 + \nu} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\theta_3}{\mu + \theta_3 + \varepsilon} & \frac{\nu}{\mu + \theta_2 + \nu} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\rho\omega f + (1-\rho)p_h f}{\mu + \theta_3 + \varepsilon} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

Matriks generasi pada elemen j, k diinterpretasikan sebagai banyaknya kasus baru pada kompartemen j yang dihasilkan dari satu infeksi pada kompartemen k . Sehingga elemen K_{15}

menginterpretasikan satu jarum suntik terinfeksi menghasilkan $\frac{p_n(1-\rho)}{\rho}$ IDUs exposed non treatment. Polinom karakteristik untuk menemukan R_0 dari NGM yang diberikan oleh (4) dapat ditulis sebagai berikut:

$$F(\lambda) = A_5\lambda^5 - A_3\lambda^3 - A_2\lambda^2 + A_1\lambda - A_0 \quad (5)$$

dengan

$$A_5 = \rho(\mu + \nu + \theta_1)(\mu + \varepsilon + \theta_3)(\mu + \theta_2 + \nu)(\mu + \theta_4 + \varepsilon).$$

$$A_3 = \rho((\mu + \nu)\theta_2\theta_3\theta_4 + (\mu + \nu)^2\theta_3\theta_4 + (\mu + \varepsilon)^2\theta_2\theta_1 + (\mu + \nu)\theta_1\theta_3\theta_4 + (\mu + \varepsilon)(\theta_1\theta_2\theta_3 + \theta_1\theta_2\theta_4) + 2\theta_1\theta_2\theta_3\theta_4).$$

$$A_2 = \nu f(\rho\omega + p_h - p_h\rho)p_n(1 - \rho)(\mu + \theta_2 + \nu)(\mu + \theta_4 + \varepsilon).$$

$$A_1 = \theta_1\theta_2\theta_3\theta_4\lambda.$$

$$A_0 = f\nu(1 - \rho)\theta_1\theta_4p_n(\rho\omega + p_h - p_h\rho).$$

Hasil analitik untuk memperoleh R_0 dari model (1) sangat tidak mungkin untuk dilakukan. Dengan demikian diperlukan penyederhanaan kasus agar diperoleh R_0 sebagai nilai eigen terbesar dari polinom karakteristik matriks K .

Pertama akan ditinjau untuk kasus dimana tidak terjadi laju IDUs yang keluar dari NEP ($\theta_2 = \theta_4 = 0$). Sehingga bentuk polinomial (5) dapat direduksi dan menghasilkan nilai eigen terbesar atau R_0 sebagai berikut:

$$R_0 = \sqrt[3]{\frac{f\nu p_n(1 - \rho)(\rho\omega - p_h\rho + p_h)}{\rho(\mu + \varepsilon + \theta_3)(\mu + \nu + \theta_1)}}.$$

Kasus berikutnya ditinjau ketika tidak ada treatment ($\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \theta_4 = 0$) memberikan akar positif terbesar atau R_0 dalam bentuk

$$R_0 = \sqrt[3]{\frac{f\nu p_n(1 - \rho)(\rho\omega - p_h\rho + p_h)}{\rho(\mu + \varepsilon)(\mu + \nu)}}.$$

Dari kedua kasus di atas maka dapat dikaji bahwa tanpa adanya treatment akan memperbesar nilai R_0 yang artinya endemik akan lebih mudah terjadi. Selain itu, kita juga bisa memperoleh alternatif dari R_0 dengan berdasarkan fakta bahwa $F(\lambda)$ memiliki satu akar real positif yang mendominasi akar polinomial dari $F(\lambda)$. Karena R_0 sebagai akar terbesar dari $F(\lambda)$ memiliki ambang batas 1 maka dengan mengevaluasi nilai $F(1)$, diperoleh hubungan antara R_0 dan $F(1)$ sebagai berikut:

$$R_0 < 1 \Leftrightarrow F(1) > 0, \quad (6)$$

$$F(1) = A_5 - A_3 - A_2 + A_1 - A_0 > 0. \quad (7)$$

Dari pertidaksamaan (7) diperoleh

$$R_1 = \frac{A_0 + A_2}{A_5 - A_3 + A_1} < 1,$$

dengan R_1 adalah alternative *basic reproductive ratio* dari sistem (1) atau secara lengkap dapat ditulis sebagai:

$$R_1 = \frac{vp_n(1-\rho)(\rho\omega - p_h\rho + p_h)\delta_1 f}{\rho(\mu + \varepsilon)(\mu + \varepsilon + \theta_4 + \theta_3)(\mu + \nu)(\mu + \theta_2 + \nu + \theta_1)}$$

dengan $\delta_1 = (\mu + \theta_1 + \theta_2 + \nu)\theta_4 + (\mu + \varepsilon)(\mu + \theta_2 + \nu)$. Pada kasus dimana $\theta_2 = \theta_4 = 0$,

$$R_1 = \frac{vp_n(1-\rho)(\rho\omega - p_h\rho + p_h)f}{\rho(\mu + \varepsilon + \theta_3)(\mu + \nu + \theta_1)},$$

memiliki makna biologis yaitu 1 IDUs terinfeksi non treatment (I_1) menghasilkan $fp_h(1-\rho) + \rho f\omega$ jarum suntik terinfeksi (N_i) dengan periode infeksi $1/(\mu + \varepsilon + \theta_3)$, 1 jarum suntik terinfeksi (N_i) menghasilkan $fp_n(1-\rho)$ IDUs exposed non treatment dengan periode infeksi $1/\eta$, dan 1 IDUs exposed non treatment menghasilkan ν IDUs terinfeksi tanpa treatment dengan periode infeksi $1/(\mu + \nu + \theta_1)$.

Untuk melihat hubungan antara R_0 dan R_1 dapat dinyatakan sebagai berikut:

Misalkan R_0 adalah *basic reproductive ratio* dan R_1 adalah alternative *basic reproductive ratio* dari sistem (1) maka kondisi berikut berlaku untuk semua nilai R_0 dan R_1 :

- (i) $R_0 = 1$ jika dan hanya jika $R_1 = 1$
- (ii) $R_0 > 1$ jika dan hanya jika $R_1 > 1$
- (iii) Lebih jauh lagi, $R_0 < R_1$ ketika $R_0 > 1$ dan $R_0 > R_1$ ketika $R_0 < 1$

Bukti:

Untuk bagian (i) ketika $R_0 = 1$ maka memenuhi $F(R_0) = 1$, yang juga memenuhi $R_1 = 1$. Untuk bagian (ii) dan (iii) ketika $R_0 < 1$ akan dibuktikan sebagai berikut (untuk $R_0 > 1$ dapat dilakukan dengan cara yang serupa). $F(1) = A_5 - A_3 - A_2 + A_1 - A_0$ dan R_1 memenuhi persamaan

$$R_1(A_5 - A_3 + A_1) = A_0 + A_2 \tag{8}$$

dilain pihak R_0 memenuhi persamaan

$$F(R_0) = A_5R_0^5 - A_3R_0^3 - A_2R_0^2 + A_1R_0 - A_0 = 0 \tag{9}$$

substitusi A_0 pada (8) dengan A_0 pada (9) dan manipulasi perhitungan ketika $R_0 < 1$ sehingga diperoleh

$$R_1(A_5 - A_3 + A_1) - A_2 - A_1R_0 = A_5R_0^5 - A_3R_0^3 - A_2R_0^2 \tag{10}$$

$$< A_5R_0^3 - A_3R_0 - A_2 \tag{11}$$

dengan manipulasi perhitungan selanjutnya pertidaksamaan (11) menjadi

$$(R_1 - R_0)(A_5 - A_3 + A_1) < 0,$$

karena $(A_5 - A_3 + A_1) > 0$ maka $(R_1 - R_0) < 0$ sehingga $R_1 < R_0 < 1$.
Jadi, bagian (ii) dan (iii) terbukti.

SIMULASI NUMERIK

Untuk keperluan simulasi diperlukan nilai-nilai parameter yang selengkapnya dideskripsikan sebagai berikut:

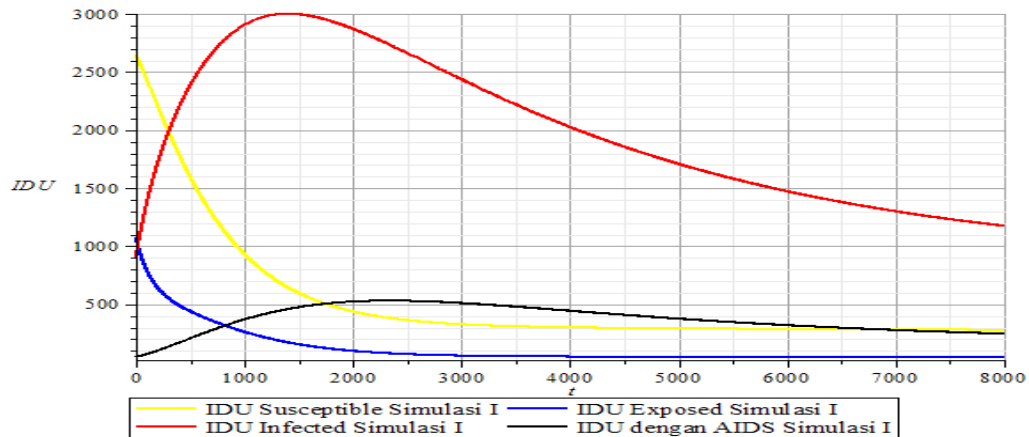
1. Rata-rata usia IDUs adalah 65 tahun sehingga laju kematian alami IDUs perharinya adalah $\frac{1}{65.365}$.
2. Selang waktu rata-rata dari IDUs terekspos hingga terinfeksi virus HIV adalah 0.5 tahun sehingga laju transisi alami dari exposed ke infected perharinya adalah $\frac{1}{0.5.365}$.
3. Selang waktu rata-rata dari IDUs mulai terinfeksi virus HIV hingga mengidap AIDS adalah 10 tahun sehingga laju transisi alami dari infected ke AIDS perharinya adalah $\frac{1}{10.365}$.
4. Rata-rata kematian IDUs karena AIDS adalah 2 tahun sehingga laju kematian alami IDUs karena AIDS perharinya adalah $\frac{1}{2.365}$.
5. Rata-rata menyuntik tiap IDUs adalah 2 kali sehari sehingga frekuensi menyuntik adalah 2 unit suntikan tiap IDUs perhari.
6. Diasumsikan dalam 1 tahun terdapat sekitar 100 non IDUs menjadi IDUs baru sehingga laju rekrutmen perharinya adalah $\frac{100}{365}$.
7. Diasumsikan rata-rata penggunaan jarum sebelum dibuang adalah 3 hari sehingga laju pembuangan jarum perharinya adalah $\frac{1}{3}$.
8. Diasumsikan peluang sukses infeksi dari jarum terinfeksi ke IDUs susceptible adalah 0,001.
9. Diasumsikan peluang sukses infeksi dari IDUs terinfeksi ke jarum suntik susceptible adalah 0,65.
10. Diasumsikan peluang IDUs membawa satu jarum suntik baru adalah 0,15.
11. Diasumsikan peluang terinfeksi jarum bersih yang dibawa oleh IDUs yang terinfeksi 0,75.
12. Populasi awal dari tiap kompartemen dipilih nilai-nilai yang secara matematis dapat dituliskan sebagai berikut.

$$\begin{aligned} S_1(0) &= 2500, & E_1(0) &= 1000, & In_1(0) &= 800, \\ S_2(0) &= 150, & E_2(0) &= 80, & In_2(0) &= 100, \\ A(0) &= 50, & N_c(0) &= 500, & N_i(0) &= 100. \end{aligned}$$

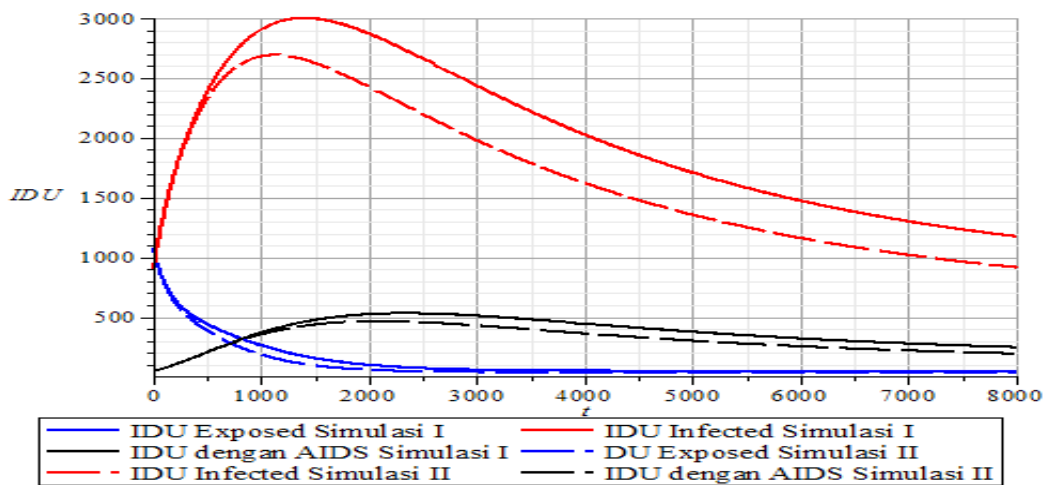
Pengaruh NEP dalam mengendalikan penyebaran HIV/ AIDS di kalangan IDUs disimulasikan dengan memvariasikan besaran dari parameter laju IDUs yang masuk atau mengikuti NEP (θ_1, θ_3) dan parameter laju IDUs yang keluar dari NEP (θ_2, θ_4) . Dari keempat parameter $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ dan θ_4 akan dilihat bagaimana pengaruh dari masing-masing parameter dalam mengendalikan penyebaran HIV/AIDS di kalangan IDUs. Berikut adalah skenario dari simulasi numerik model ini:

1. Tidak ada treatment pada IDUs $(\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \theta_4 = 0)$. Hasil dari simulasi I ditampilkan pada Gambar 2.

2. Treatment dilakukan pada IDUs susceptible dan exposed ($\theta_3 = \theta_2 = \theta_4 = 0$). Hasil dari simulasi II ini akan dibandingkan dengan hasil simulasi I. Hasil simulasi terdapat pada Gambar 3. Secara keseluruhan terjadi penurunan jumlah populasi kesetimbangan IDUs exposed, infected dan AIDS pada simulasi II. Dari simulasi ini memperlihatkan bahwa dengan melakukan treatment pada IDUs susceptible dan exposed dapat mengurangi jumlah populasi yang terinfeksi HIV pada IDUs.

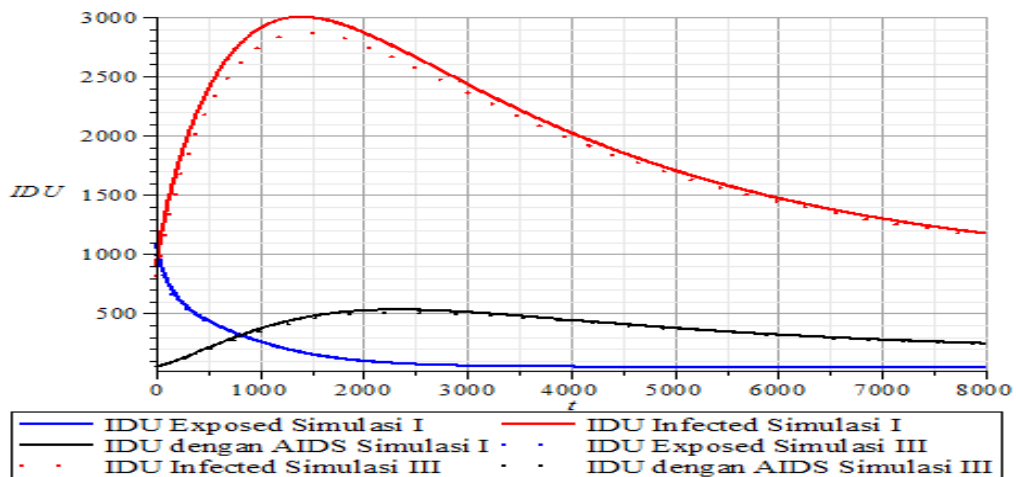


Gambar 2. Perubahan populasi IDUs pada simulasi I.



Gambar 3. Perubahan populasi IDUs pada simulasi I dan II.

3. Treatment dilakukan pada IDUs infected ($\theta_1 = \theta_2 = \theta_4 = 0$). Hasil dari simulasi III ini dibandingkan dengan hasil simulasi I. Gambar 4 adalah hasil simulasi III. Secara keseluruhan pada simulasi III ini tidak terjadi penurunan yang signifikan untuk populasi exposed, infected dan AIDS.



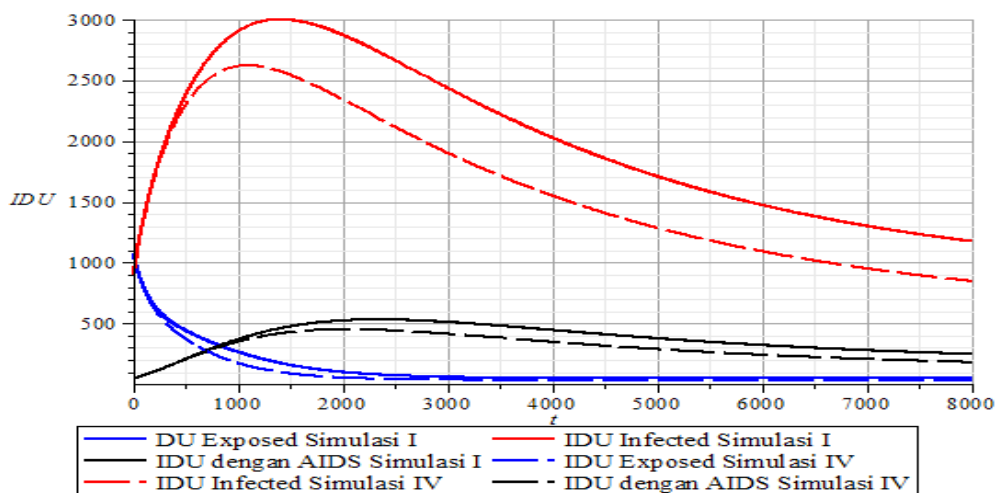
Gambar 4. Perubahan populasi IDUs pada simulasi I dan III.

4. Treatment dilakukan pada semua IDUs ($\theta_2 = \theta_4 = 0$). Variasi parameter dari θ_1 dan θ_3 untuk simulasi IV dan V disajikan dalam tabel 2.

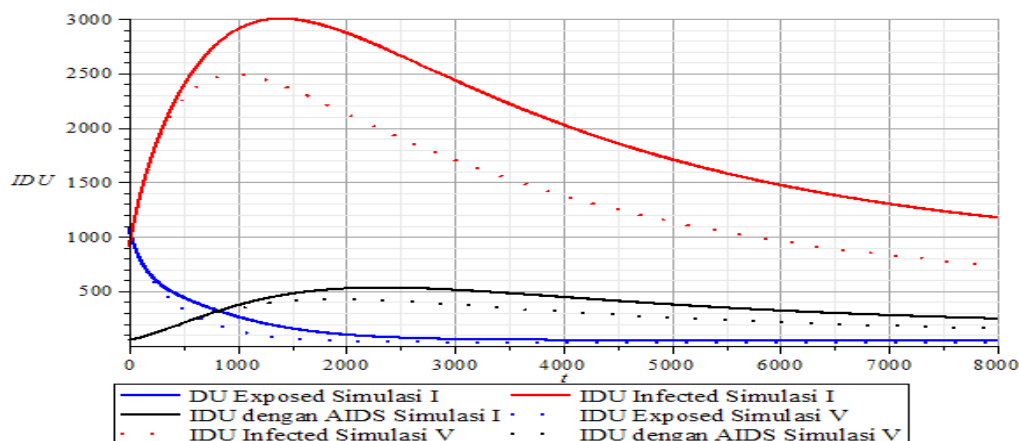
Tabel 2. Variasi parameter θ_1 dan θ_3 pada simulasi IV dan V.

Parameter	Simulasi IV	Simulasi V
θ_1	0,000602	0,000996
θ_3	0,000806	0,000738

Hasil dari simulasi IV dan V dibandingkan dengan simulasi I disajikan pada Gambar 5 dan 6.



Gambar 5. Perubahan populasi IDUs pada simulasi I dan IV.



Gambar 6. Perubahan populasi IDUs pada simulasi I dan V.

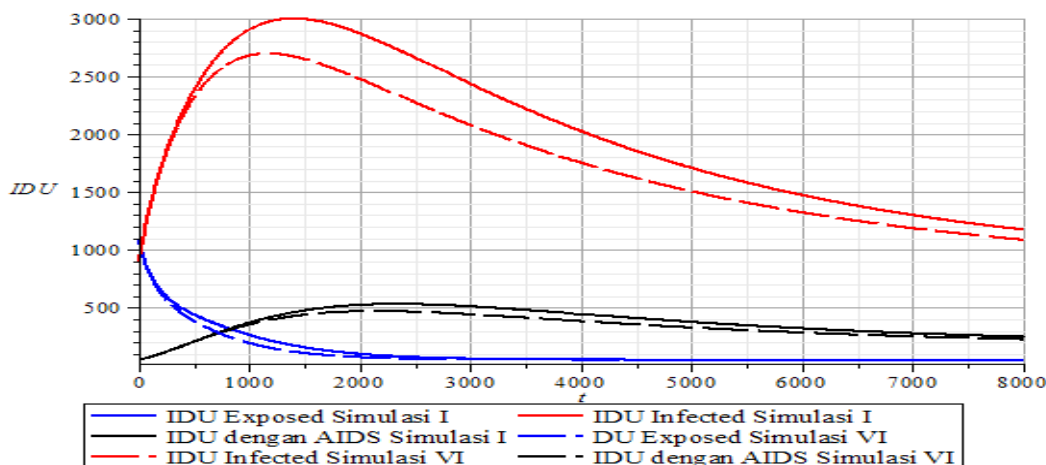
Secara numerik kedua simulasi memiliki nilai R_0 yang sama yaitu 1,81 namun dengan pemilihan parameter θ_1 dan θ_3 yang berbeda menghasilkan tingkat penurunan populasi yang berbeda pula. Simulasi V memiliki nilai parameter θ_1 yang lebih dominan dibanding θ_3 . Hasil kedua simulasi ini memperlihatkan bahwa meningkatkan laju IDUs susceptible dan exposed yang mengikuti NEP lebih cepat menurunkan jumlah IDUs yang terinfeksi dan AIDS dibanding meningkatkan laju IDUs infected yang mengikuti NEP. Hasil dari simulasi I, IV dan V dapat dilihat pada Gambar 6.

5. Treatment dilakukan pada IDUs susceptible, exposed dan infected dengan melibatkan adanya laju IDUs yang keluar dari treatment.

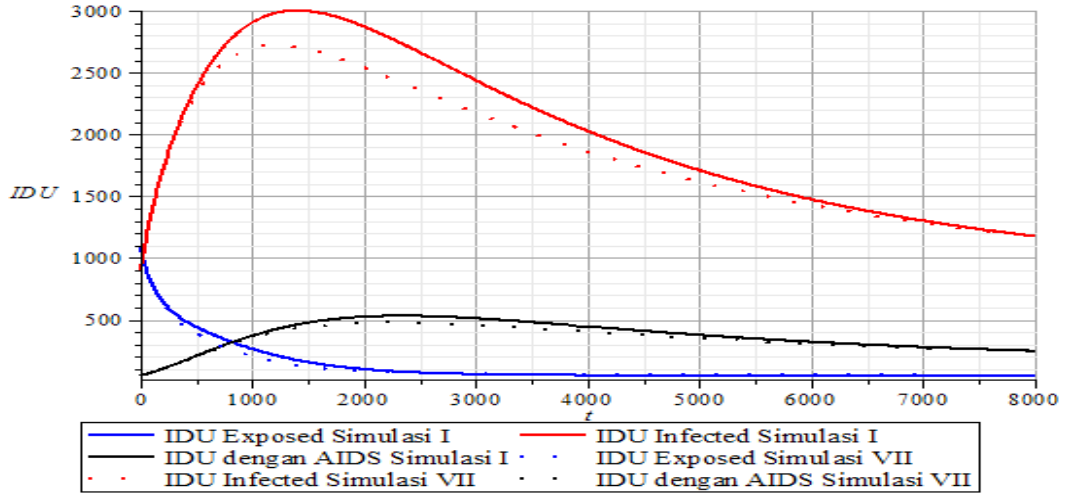
Tabel 3. variasi parameter θ_2 dan θ_4 pada simulasi VI dan VII.

Parameter	Simulasi VI	Simulasi VII
θ_2	0,000133	0,000290
θ_4	0,0002	0,000194

Hasil dari simulasi VI dan VII dibandingkan dengan simulasi I disajikan pada Gambar 7 dan 8.



Gambar 7. Perubahan populasi IDUs pada simulasi I dan VI



Gambar 8. Perubahan populasi IDUs pada simulasi I dan VII

KESIMPULAN

Konstruksi model pengendalian penyebaran HIV/AIDS di kalangan *Injecting Drug Users* (IDUs) dengan *Needle Exchange Program* (NEP) dihasilkan pada penelitian ini. Adapun rincian hasil-hasil dari penelitian ini disajikan sebagai berikut:

1. Dari hasil analisis model diperoleh dua titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik. Eksistensi titik kesetimbangan endemik diperoleh jika berlaku,

$$R_1 = \frac{vp_n(1-\rho)(\rho\omega - p_h\rho + p_h)\delta_1 f}{\rho(\mu + \varepsilon)(\mu + \varepsilon + \theta_4 + \theta_3)(\mu + \nu)(\mu + \theta_2 + \nu + \theta_1)} > 1,$$

dengan $\delta_1 = (\mu + \theta_1 + \theta_2 + \nu)\theta_4 + (\mu + \varepsilon)(\mu + \theta_2 + \nu)$.

2. Syarat cukup kestabilan titik kesetimbangan bebas penyakit adalah

$$a_5 = \eta(\mu + \varepsilon)(\mu + \theta_4 + \varepsilon + \theta_3)(\mu + \nu)(\mu + \theta_2 + \nu + \theta_1)(1 - R_1) > 0,$$

sehingga,

$$R_1 = \frac{vp_n(1-\rho)(\rho\omega - p_h\rho + p_h)\delta_1 f}{\rho(\mu + \varepsilon)(\mu + \varepsilon + \theta_4 + \theta_3)(\mu + \nu)(\mu + \theta_2 + \nu + \theta_1)} < 1,$$

dengan $\delta_1 = (\mu + \theta_1 + \theta_2 + \nu)\theta_4 + (\mu + \varepsilon)(\mu + \theta_2 + \nu)$.

3. Pada kasus khusus ketika tidak ada treatment ($\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \theta_4 = 0$) pada IDUs maka diperoleh R_0 atau basic reproductive ratio sebagai berikut:

$$R_0 = \sqrt[3]{\frac{fvp_n(1-\rho)(\rho\omega - p_h\rho + p_h)}{\rho(\mu + \varepsilon + \theta_3)(\mu + \nu + \theta_1)}}.$$

4. Pada kasus lainnya ketika tidak ada laju IDUs yang keluar dari NEP ($\theta_2 = \theta_4 = 0$) diperoleh R_0 atau basic reproductive ratio sebagai berikut:

$$R_0 = \sqrt[3]{\frac{fvp_n(1-\rho)(\rho\omega - p_h\rho + p_h)}{\rho(\mu + \varepsilon + \theta_3)(\mu + \nu + \theta_1)}}.$$

5. Secara analitik, R_0 atau basic reproductive ratio untuk model secara keseluruhan sangat tidak mungkin untuk ditentukan. Namun, bisa diperoleh alternative dari basic reproductive ratio yaitu R_1 yang secara eksplisit dinyatakan sebagai berikut,

$$R_1 = \frac{vp_n(1-\rho)(\rho\omega - p_h\rho + p_h)\delta_1 f}{\rho(\mu + \varepsilon)(\mu + \varepsilon + \theta_4 + \theta_3)(\mu + \nu)(\mu + \theta_2 + \nu + \theta_1)},$$

dengan $\delta_1 = (\mu + \theta_1 + \theta_2 + \nu)\theta_4 + (\mu + \varepsilon)(\mu + \theta_2 + \nu)$.

REFERENSI

- [1] HIV/AIDS in the South-East Asia Region. 2012. *Progres Report 2011*. World Health Organization. India
- [2] I. Afriandi, T.Y. Aditama, D. Mutikawati, M. Oktavia, B. Alisjahbana, P. Riono. 2009. HIV and Injecting Drug Use in Indonesia. *Epidemiology and National Respons. Acta Med Indones Indoenes J intern Med* 41(1), pp. 75-78.
- [3] J. A. Kwon, J.I. Iversen, L. Maher, M.G. Law, and D. P Wilson. 2009. The Impact of Needle and Syringe Program on HIV and HCV Transmission in Injecting Drug Users in Australia: A model-Based Analysis. *Epidemiology and Social Science*. Vol. 51(4).
- [4] Ringkasan Laporan Survei Perilaku dan Kepuasan Layanan Pengguna Napza Suntik. Komisi Penanggulangan AIDS Nasional. 2010. *Kemitraan Indonesia-Australia*. HIV Cooperation Program for Indonesia (HCPI).
- [5] E.H. Kaplan. 1989. Needles That Kill: Modeling Human Immodeficiency Virus Transmission via Shared Drug Injection Equipment in Shooting Galleries. *Rev.Inf.Disease* 11, pp. 289-298
- [6] Greenhalg. 1997. Mathematical Modelling of the Spread of HIV/AIDS amongst Injecting Drug Users. *IMA J.Math.Appl.in Med & Biology* 14, pp.11-38
- [7] N. Nuraini, R. Irawan, Zulkifli, E. Soewono. 2011. Mathematical Modeling of HIV/AIDS Transmission among Injecting Drug Users with Metadone Terapy. *Asian Transaction on Basic & Applied Sciences (ATBAS)*, Vol. 01 Issue 05, pp. 10-15.
- [8] R. A. Kimbir, M. J. I. Udoo, T. Aboiyar. 2012. A Mathematical Model for the Transmission Dynamics of HIV/AIDS in a Two-Sex Population Counseling and Antiretroviral Therapy (ART). *Journal of Mathematical and Computational Science*, Vol 2, No 6 (2012), pp. 1671-1684.
- [9] O. Dickmann, J.A.P. Hesterbeck. 2000. *Mathematical Epidemiology of Infectious, Model Building, Analysis and Interpretasion*. John and Willey & Son. Chichester