Jurnal "LOG!K@" , Jilid 6, No. 1, 2016, Hal. 11 - 22
ISSN 1978 – 8568

SOLUSI ANALITIK MASALAH KONDUKSI PANAS PADA TABUNG

Afo Rakaiwa dan Suma'inna
Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi,
Universitas Islam Negeri Syarif Hidayatullah Jakarta
Email: suma.inna@uinjkt.ac.id

Abstract: In this study, we discussed the application of integral method of heat balance to solve the heat conduction problems on the cylinder analytically. In this method, function of temperature is approached by polynomials. Degree of the polynomial can be to be added but it required the additional boundary conditions that found from the governing di§erential equation and the basic boundary conditions. These boundary conditions are used to determine the coefficients of this polynomial. Shortcoming of this method is only applicable to cylinder which has a constant initial temperature.
Keywords: heat conduction, cylinder, integral method of heat balance, additional boundary conditions.

Abstrak: Pada penelitian ini, dibahas mengenai penerapan metode integral dari keseimbangan panas untuk memecahkan masalah konduksi panas pada silinder secara analitik. Dalam metode ini, fungsi temperatur didekati oleh polinomial. Derajat polinomial dapat ditambahkan namun diperlukan syarat batas tambahan yang didapat dari pengaturan persamaan diferensial dan syarat batas dasar. Kondisi batas ini digunakan untuk menentukan koefisien dari polinomial ini. Kelemahan dari metode ini hanya berlaku untuk silinder yang memiliki suhu awal konstan.
Kata kunci: Konduksi Panas, Persamaan differential, Solusi Analitik.

PENDAHULUAN

Konduksi adalah cara perpindahan panas berlangsung pada benda padat atau pada keseluruhan cairan dari daerah bersuhu tinggi ke daerah bersuhu rendah akibat adanya gradien suhu pada benda tersebut tanpa disertai perpindahan bagian-bagian benda tersebut. Aliran panas tidak dapat diukur secara langsung, tetapi konsep pengukuran panas mempunyai arti fisik karena berhubungan dengan pengukuran kuantitas skalar yang disebut suhu. Oleh karena itu, saat distribusi suhu di sebuah benda ditentukan sebagai fungsi posisi dan waktu, maka aliran panas dapat dihitung dari hukum yang berhubungan dengan aliran panas sampai gradien suhu.

Dalam persoalan perpindahan panas, khususnya konduksi panas, persamaan konduksi panas dilinearkan dengan mengasumsikan bahwa sifat panas tidak ber-gantung pada suhu, lebih jauh syarat batas juga diasumsikan linear. Tetapi tidak semua persoalan konduksi panas dapat diselesaikan dengan pendekatan persamaan linear. Sebagai contoh jika suhu dalam benda padat bervariasi di berbagai titik, dengan kata lain $T(x)$ dengan x adalah koordinat benda, maka sifat panas bergantung pada suhu dan persamaan panas menjadi nonlinear.

Goodman [4] memperkenalkan sebuah penyelesaian matematis, yang disebut metode integral keseimbangan panas, dimana pendekatan solusi terhadap persamaan konduksi panas nonlinear dapat diselesaikan. Dengan metode ini, pemanasan (pendinginan) dari sebuah benda dibagi menjadi 2 tahap [1]. Tahap pertama, suhu gangguan depan (*temperature perturbation front*) secara bertahap meningkat dari permukaan ke pusat benda. Tahap kedua, suhu menyebar ke seluruh volume benda sampai mencapai keadaan stabil. Metode ini menggunakan asumsi polinomial untuk pendekatan fungsi suhu. Derajat polinomial dapat ditambahkan namun diperlukan adanya syarat batas tambahan untuk menentukan koefisien dari polinomial tersebut. Syarat batas tambahan ini didapat dari pengaturan persamaan diferensial dan syarat batas dasar, termasuk yang terperinci pada suhu gangguan depan. Kelemahan dari metode ini adalah tidak dapat diterapkan pada permasalahan dengan suhu awal berbeda-beda di setiap titik tabung [1]. Sehingga diperlukan asumsi suhu awal konstan di setiap titik. Penelitian ini bertujuan untuk menjelaskan solusi analitik masalah konduksi panas untuk tabung dengan menggunakan metode integral keseimbangan panas yang telah diperkenalkan oleh Goodman pada [4].

TINJAUAN PUSTAKA

Persamaan Diferensial Konduksi Panas untuk Tabung

Persamaan yang mengandung unsur derivatif disebut dengan persamaan diferensial [2]. Persamaan diferensial biasa orde satu mempunyai bentuk [2]:

$$\frac{dy}{dt} = f(x, y).$$

Persamaan diferensial biasa orde dua mempunyai bentuk [2]:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = f\left(t, y, \frac{dy}{dt}\right) \tag{1}$$

Syarat awal untuk persamaan (1) adalah

$$y(t_0) = y_0, y'(t_0) = y'_0.$$

dengan y_0 dan y'_0 adalah konstanta.

Persamaan konduksi panas tidak tetap satu dimensi pada silinder tak terhingga seperti diilustrasikan pada Gambar 1 adalah sebagai berikut [3]

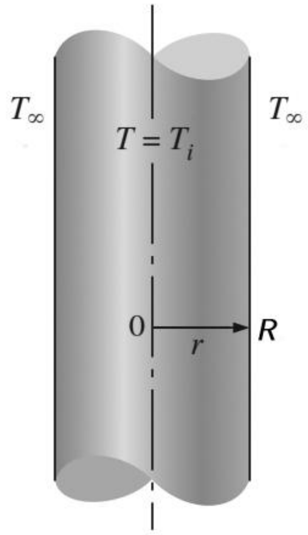
$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}; t > 0; 0 \leq r \leq R;$$

dengan $\alpha = \frac{k}{\rho C}$ adalah difusivitas panas, R adalah jari-jari, r adalah posisi terhadap jari-jari, $T = T(r, t)$ adalah suhu yang bergantung pada posisi dan waktu, dan t adalah waktu**.**
Dengan menggunakan besaran tak berdimensi berikut [3],

$\Theta(\delta, Fo) = \frac{T(r,t)-T_i}{T_\infty - T_i}$ menyatakan koordinat tak berdimensi untuk suhu;
$\delta = \frac{r}{R}$ menyatakan koordinat tak berdimensi jarak dari pusat tabung;
$Fo = \frac{\alpha t}{R^2}$ menyatakan koordinat tak berdimensi untuk waktu,

persamaan konduksi panas tidak tetap untuk silinder tak terhingga menjadi

$$\frac{1}{\delta}\frac{\partial}{\partial\delta}\left(\delta\frac{\partial\Theta(\delta,Fo)}{\partial\delta}\right)=\frac{\partial\Theta(\delta,Fo)}{\partial Fo};Fo>0;\ 0\leq\delta<1.$$



Gambar 1. Koordinat tabung tak terhingga

Integral Keseimbangan Panas

Goodman [4] memperkenalkan sebuah metode pendekatan pada masalah konduksi panas yang disebut integral keseimbangan panas. Permasalahan konduksi panas tersebut tidak harus linear karena metode ini juga mencakup masalah nonlinear. Metode integral ini mengurangi masalah batas nilai nonlinear menjadi masalah nilai awal biasa yang solusinya dapat dinyatakan dalam bentuk analitik tertutup (*closed analytical*). Metode ini juga dapat digunakan untuk mendapatkan solusi pendekatan masalah linear dengan sifat panas rumit yang bergantung secara spasial, dan masalah yang melibatkan konveksi.

Dalam metode ini, pemanasan (pendinginan) dari sebuah benda dibagi menjadi dua tahap. Pertama, suhu gangguan depan maju dari permukaan ke pusat benda; kedua, suhu tersebut berubah pada seluruh volume benda sampai mencapai keadaan setimbang. Metode ini menggunakan asumsi polinomial untuk fungsi suhu. Koefisien dari suku banyak ditentukan menggunakan syarat batas tambahan, yaitu pengaturan persamaan diferensial dan syarat batas dasar, termasuk yang terperinci pada suhu gangguan depan. Kelemahan dari metode ini adalah tidak dapat diterapkan pada permasalahan dengan suhu awal berbeda-beda di setiap titik tabung. Sehingga diperlukan asumsi suhu awal konstan di setiap titik.

Langkah-langkah metode integral keseimbangan panas adalah sebagai berikut:

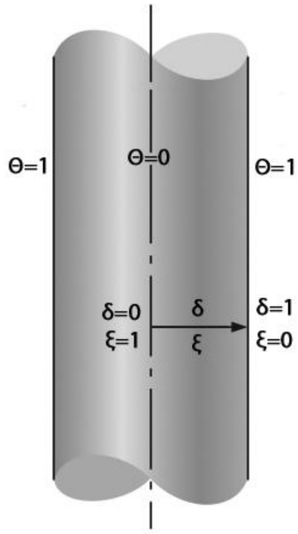
a. Persamaan konduksi panas diintegralkan terhadap $q(Fo)$, yang disebut kedalaman penetrasi, sehingga didapat integral keseimbangan panas.
b. Representasi fungsi suhu dengan polinomial. Koefisien polinomial diperoleh dari syarat batas dasar dan syarat batas tambahan.
c. Setelah fungsi suhu dikonstruksikan dan disubstitusi pada integral keseimbangan panas diperoleh persamaan diferensial biasa untuk $q(Fo)$ dan Fo. solusinya berupa fungsi q yang bergantung pada Fo

d. Setelah diperoleh fungsi $q(Fo)$, dapat ditentukan juga distribusi suhu $\Theta(\xi, Fo)$ sebagai fungsi posisi dan waktu.

PEMBAHASAN

Solusi Analitik Masalah Konduksi Panas pada Tabung

Misalkan sebuah tabung tak terhingga dengan suhu awal konstan T_i dan suhu pada permukaan tabung adalah konstan T_∞. Setiap titik pada tabung saat kondisi awal diasumsikan konstan T_i, sedangkan pada permukaan tabung diasumsikan T_∞. Tabung juga diasumsikan simetri terhadap pusat tabung.



Gambar 2. Koordinat tak berdimensi pada tabung tak terhingga

Masalah konduksi panas yang tidak tetap pada tabung tak terhingga seperti pada Gambar 2 dimodelkan sebagai berikut:

$$\frac{\partial\Theta(\delta, Fo)}{\partial Fo} = \frac{1}{\delta}\frac{\partial}{\partial\delta}\left(\delta\frac{\partial\Theta(\delta, Fo)}{\partial\delta}\right); Fo > 0; 0 \leq \delta < 1, \tag{2}$$

$$\Theta(\delta, 0) = 0, \tag{3}$$

$$\frac{\partial\Theta(0, Fo)}{\partial\delta} = 0, \tag{4}$$

$$\Theta(1, Fo) = 1, \tag{5}$$

dengan:

$\Theta = \frac{T(r,t)-T_i}{T_\infty - T_i}$ adalah koordinat tak berdimensi untuk suhu;
T_i adalah suhu awal;
T_∞ adalah suhu permukaan;
$\delta = \frac{r}{R}$ adalah koordinat tak berdimensi untuk posisi terhadap jari-jari;
R adalah jari-jari tabung;
$Fo = \frac{\alpha t}{R^2}$ adalah koordinat tak berdimensi untuk waktu;
α adalah difusivitas termal;
t adalah waktu.

Persamaan (3) menyatakan suhu awal setiap titik pada tabung adalah T_0 sehingga $\Theta(\delta, 0) = (T_i - T_i)/(T_\infty - T_i) = 0$. Persamaan (4) menyatakan gradien suhu antara 2 titik yang simetri dengan pusat tabung adalah nol. Persamaan (5) menyatakan suhu pada permukaan tabung adalah T_∞ sehingga $\Theta(1, Fo) = (T_\infty - T_i)/(T_\infty - T_i) = 1$.

Proses pemanasan dibagi menjadi dua tahap: $0 \leq Fo \leq Fo_1$, yaitu waktu yang diperlukan untuk pemanasan mencapai pusat lingkaran dan $Fo_1 \leq Fo < \infty$, yaitu waktu yang diperlukan untuk suhu mencapai keadaan setimbang di semua titik tabung. Untuk tujuan ini, diperkenalkan batas waktu bervariasi yang membagi domain asli $0 \leq \delta \leq 1$ menjadi dua subdomain $0 \leq \delta \leq q_1(Fo)$ dan $q_1(Fo) \leq \delta \leq 1$, dengan $q_1(Fo)$ adalah kedalaman penetrasi terhadap waktu dan tidak ada aliran panas setelah titik $q_1(Fo)$. Tahap pertama dari pemanasan selesai saat batas bergerak mencapai pusat dari tabung. Para tahap kedua, suhu berubah pada seluruh volume benda: $0 \leq \delta \leq 1$.

Dengan mengganti variabel δ dari pusat lingkaran menjadi $\xi = 1 - \delta$ dari permukaan tabung dan mengenalkan kedalaman lapisan panas $q_1(Fo)$ sebagai koordinat umum, didapatkan persamaan untuk tahap pertama:

$$\frac{\partial\Theta(\xi, Fo)}{\partial Fo} = \frac{1}{(1-\xi)}\frac{\partial}{\partial\xi}\left((1-\xi)\frac{\partial\Theta(\xi, Fo)}{\partial\xi}\right);\ 0 \leq Fo \leq Fo_1;\ 0 \leq \xi \leq q_1(Fo), \tag{6}$$

$$\Theta(\xi, 0) = 0, \tag{7}$$

$$\Theta(0, Fo) = 1, \tag{8}$$

syarat batas (4) tidak diperlukan pada persamaan (6)-(8), karena tidak mempengaruhi perpindahan panas pada tahap pertama.

Setelah memperkenalkan $q_1(Fo)$, diperlukan syarat berikut pada suhu gangguan depan:

$$\Theta(\xi, Fo)|_{\xi=q_1} = 0, \qquad \left.\frac{\partial\Theta(\xi, Fo)}{\partial\xi}\right|_{\xi=q_1} = 0. \tag{9}$$

Syarat pertama dari (9) berarti suhu dari benda pada batas bergerak sama dengan suhu awal, sedangkan syarat kedua berarti tidak ada aliran panas di luar suhu gangguan depan.

Misalkan solusi yang diinginkan pada persamaan (6)-(7) tidak memenuhi persamaan panas asli (6) melainkan persamaan tersebut diratakan berdasarkan kedalaman lapisan panas $0 \leq \xi \leq q_1(Fo)$. Integralkan persamaan (6) terhadap ξ dari nol sampai $q_1(Fo)$ dan memperhatikan syarat kedua dari (9) menghasilkan integral (integral keseimbangan panas)

$$\int_0^{q_1(Fo)} (1-\xi)\frac{\partial\Theta(\xi, Fo)}{\partial Fo}d\xi = -\left.\frac{\partial\Theta(\xi, Fo)}{\partial\xi}\right|_{\xi=0}. \tag{10}$$

Representasi suhu asli dapat berbentuk polinomial berderajat n:

$$\Theta(\xi, Fo) = \sum_{k=0}^{n} a_k(q_1)\xi^k. \quad (11)$$

Menggunakan $n = 2$,

$$\Theta(\xi, Fo) = a_0(q_1) + a_1(q_1)\xi + a_2(q_1)\xi^2. \quad (12)$$

Substitusi (12) ke persamaan (8) dan (9) didapatkan koefisien tak diketahui $a_k(q_1)$, yaitu

$$a_0 = 1, a_1 = -\frac{2}{q_1}, a_2 = \frac{1}{q_1^2}.$$

Dengan menggunakan koefisien yang didapat, persamaan (12) menjadi

$$\Theta(\xi, Fo) = \left(1 - \frac{\xi}{q_1}\right)^2. \quad (13)$$

Substitusi persamaan (13) ke persamaan (10), didapat

$$\int_0^{q_1(Fo)} (1-\xi)\frac{\partial}{\partial Fo}\left(1 - \frac{\xi}{q_1}\right)^2 d\xi = \frac{2}{q_1}. \quad (14)$$

Penyelesaian dari (14) menghasilkan persamaan diferensial biasa dengan $q_1(0) = 0$ untuk menentukan fungsi tak diketahui $q_1(Fo)$:

$$\left(-\frac{q_1^2}{6} + \frac{q_1}{3}\right)\frac{dq_1}{dFo} = 2.$$

Dengan memisahkan variabel dan integralkan terhadap $q_1(Fo)$ menghasilkan suku banyak dengan bentuk

$$q_1^3 - 3q_1^2 + 36Fo = 0.$$

Nilai dari q_1 yang memenuhi persamaan di atas untuk beberapa angka Fourier adalah

Fo	q_1	Fo	q_1
1×10^{-7}	1.0956×10^{-3}	5×10^{-5}	2.4596×10^{-2}
1×10^{-6}	3.4661×10^{-3}	1×10^{-3}	0.111642
1×10^{-5}	1.0974×10^{-2}	5×10^{-3}	0.256126

Untuk $q_1 = 1$, didapatkan waktu penyelesaian proses tahap pertama: $Fo = Fo_1 = 1/18 = 0.0556$.

Akurasi dari solusi yang diinginkan dapat ditingkatkan dengan meningkatkan derajat suku banyak pada persamaan (11). Saat terdapat lebih dari tiga koefisien $a_k(q_1)$, koefisien tersebut dapat ditentukan menggunakan syarat batas tambahan. Syarat batas tersebut didapat menggunakan syarat batas (8) dan (9) dan persamaan (6). Untuk itu, persamaan (6) diturunkan secara berurutan terhadap ξ. Karena $\Theta(\xi, Fo)$ dan turunannya adalah fungsi kontinu, maka orde diferensiasi dapat diubah untuk mendapatkan

$$\frac{\partial^2\Theta(\xi, Fo)}{\partial Fo\partial\xi} = \Theta_\xi^{III} - \frac{\Theta_\xi^I}{(1-\xi)^2} - \frac{\Theta_\xi^{II}}{(1-\xi)}. \quad (15)$$

Untuk memperoleh syarat batas tambahan pertama, diferensiasikan persamaan (8) terhadap Fo dan persamaan (6) dituliskan untuk $\xi = 0$:

$$\left.\frac{\partial^2\Theta(\xi, Fo)}{\partial\xi^2}\right|_{\xi=0} - \left.\frac{\partial\Theta(\xi, Fo)}{\partial\xi}\right|_{\xi=0} = 0. \tag{16}$$

Untuk mendapatkan syarat batas tambahan kedua, diferensiasikan syarat pertama dari (9) terhadap Fo, persamaan (6) dituliskan untuk $\xi = q_1(Fo)$, dan menggunakan syarat kedua dari (9):

$$\left.\frac{\partial^2\Theta(\xi, Fo)}{\partial\xi^2}\right|_{\xi=q_1} = 0. \tag{17}$$

Untuk memperoleh syarat batas tambahan ketiga, diferensiasikan syarat kedua dari (9) terhadap Fo, menggunakan relasi (15) pada $\xi = q_1(Fo)$, dan menggunakan syarat kedua dari (9):

$$\left.\frac{\partial^3\Theta(\xi, Fo)}{\partial\xi^3}\right|_{\xi=q_1} = 0. \tag{18}$$

Syarat batas awal (8) dan (9) dan syarat batas tambahan (16), (17), dan (18) dapat digunakan untuk menentukan 6 koefisien dari suku banyak (11). Substitusi persamaan (11) ke semua syarat batas menghasilkan sistem persamaan linear berikut untuk koefisien tak diketahui $a_k(q_1)$, $k = \overline{0{,}5}$:

$$\begin{gathered}
(a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + a_3\xi^3 + a_4\xi^4 + a_5\xi^5)_{\xi=0} = 1,\\
a_0 + a_1q_1 + a_2q_1^2 + a_3q_1^3 + a_4q_1^4 + a_5q_1^5 = 0,\\
a_1 + 2a_2q_1 + 3a_3q_1^2 + 4a_4q_1^3 + 5a_5q_1^4 = 0,\\
2a_2 - a_1 = 0,\\
2a_2 + 6a_3q_1 + 12a_4q_1^2 + 20a_5q_1^3 = 0,\\
6a_3 + 12a_4q_1 + 20a_5q_1^2 = 0.
\end{gathered} \tag{19}$$

Penyelesaian sistem persamaan (19) adalah

$$\begin{aligned}
&a_0 = 1, && a_1 = -20/(Aq_1),\\
&a_2 = -10/(Aq_1), && a_3 = 20\left(2+q_1\right)/(Aq_1^3),\\
&a_4 = -5\left(8+3q_1\right)/(Aq_1^4), && a_5 = 4\left(3+q_1\right)/(Aq_1^5),
\end{aligned}$$

dengan $A = 8 + q_1$.

Koefisien a_k $(k = \overline{0{,}5})$ yang didapat disubstitusikan ke persamaan (11) untuk mendapatkan

$$\begin{aligned}
\Theta(\xi, Fo) = 1 &- \frac{20}{q_1+8}\frac{\xi}{q_1} - \frac{10q_1}{q_1+8}\left(\frac{\xi}{q_1}\right)^2 + \frac{20(q_1+2)}{q_1+8}\left(\frac{\xi}{q_1}\right)^3 - \frac{5(3q_1+8)}{q_1+8}\left(\frac{\xi}{q_1}\right)^4\\
&+ \frac{4(q_1+3)}{q_1+8}\left(\frac{\xi}{q_1}\right)^5.
\end{aligned} \tag{20}$$

Substutusikan persamaan (20) ke persamaan (10) akan menghasilkan persamaan diferensial biasa untuk fungsi tak diketahui $q_1(Fo)$:

$$(3q_1^4 + 37q_1^3 + 16q_1^2 - 336q_1)\frac{dq_1}{dFo} + 420q_1 + 3360 = 0. \tag{21}$$

Dengan memisahkan variabel pada persamaan (21) dan integralkan dengan syarat awal $q_1(0) = 0$ didapatkan

$$-\frac{q_1^4}{560} - \frac{13q_1^3}{1260} + \frac{11q_1^2}{105} - \frac{92q_1}{105} + \frac{736}{105}\ln\left(1 + \frac{q_1}{8}\right) = Fo \tag{22}$$

Untuk beberapa angka Fourier, nilai dari $q_1(Fo)$ didapat dari persamaan (22) adalah

Fo	q_1	Fo	q_1
1×10^{-7}	0.001414	5×10^{-5}	0.0316813
1×10^{-6}	0.0044733	1×10^{-3}	0.1426619
1×10^{-5}	0.0141537	5×10^{-3}	0.3230462

Untuk $q_1 = 1$, didapatkan waktu penyelesaian proses tahap pertama: $Fo = Fo_1 = 1/18 = 0.042$.

Pada kasus tabung metode penambahan syarat batas berdasarkan integral keseimbangan panas juga dapat diaplikasikan pada tahap kedua dari proses pemanasan (pendinginan). Pada tahap kedua, $Fo > Fo_1$ dan suhu bervariasi pada seluruh penampang tabung sampai keadaan setimbang didapat. Pada tahap ini, koordinat umum adalah suhu $q_2(Fo)$ pada sumbu tabung.

Persamaan matematika untuk permasalahan pada tahap kedua adalah

$$\frac{\partial\Theta(\xi, Fo)}{\partial Fo} = \frac{1}{(1-\xi)}\frac{\partial}{\partial\xi}\left((1-\xi)\frac{\partial\Theta(\xi, Fo)}{\partial\xi}\right);\ Fo \geq Fo_1;\ 0 \leq \xi < 1, \tag{23}$$

$$\Theta(\xi, Fo_1) = (1-\xi)^2, \tag{24}$$

$$\Theta(0, Fo) = 1, \Theta(1, Fo) = q_2(Fo), \left.\frac{\partial\Theta(\xi, Fo)}{\partial\xi}\right|_{\xi=1} = 0, \tag{25}$$

dengan syarat awal (24) ditentukan dengan distribusi suhu di akhir tahap pertama (persamaan (13) saat $q_1 = 1$).

Meratakan persamaan panas (23) terhadap seluruh volume benda menghasilkan integral keseimbangan panas

$$\int_0^1 (1-\xi)\frac{\partial\Theta(\xi, Fo)}{\partial Fo}d\xi = -\left.\frac{\partial\Theta(\xi, Fo)}{\partial\xi}\right|_{\xi=0}. \tag{26}$$

Sebuah solusi yang memenuhi syarat integral (26) dicari dengan bentuk polinomial

$$\Theta(\xi, Fo) = \sum_{k=0}^{n} b_k(q_2)\xi^k. \tag{27}$$

Menggunakan $n = 2$,

$$\Theta(\xi, Fo) = b_0(q_2) + b_1(q_2)\xi + b_2(q_2)\xi^2. \tag{28}$$

Substitusi (28) ke syarat batas (25) didapat koefisien untuk polinomial (28), yaitu

$$b_0 = 1, b_1 = -2\big(1 - q_2(Fo)\big), b_2 = 1 - q_2,$$

sehingga

$$\Theta(\xi, Fo) = 1 - (1 - q_2)(2 - \xi)\xi. \tag{29}$$

Substitusi persamaan (29) ke persamaan (26), diperoleh

$$\frac{dq_2}{dFo} = 8(1 - q_2). \tag{30}$$

Dengan memisahkan variabel dalam persamaan (30) dan integralkan dengan syarat awal $q_2(Fo_1) = 0$ menghasilkan

$$q_2 = 1 - exp[-8(Fo - Fo_1)]. \tag{31}$$

Hubungan (29) dan (31) menentukan solusi untuk masalah (23)-(25) di pendekatan pertama. Substitusi langsung memperlihatkan bahwa relasi (29), digabung dengan (31), sangat memenuhi integral keseimbangan panas (26), syarat batas (25), dan syarat awal (24).

Akurasi dari solusi dapat ditingkatkan dengan menambah jumlah suku pada persamaan (27). Untuk itu diperlukan syarat batas tambahan. Untuk memperoleh syarat batas tambahan, syarat (25) diturunkan terhadap Fo,

$$\frac{\partial\Theta(0, Fo)}{\partial Fo} = 0, \left.\frac{\partial\Theta(\xi, Fo)}{\partial Fo}\right|_{\xi=1} = \frac{dq_2(Fo)}{dFo}, \left.\frac{\partial^2\Theta(\xi, Fo)}{\partial Fo\,\partial\xi}\right|_{\xi=1} = 0. \tag{32}$$

Persamaan (23) diaplikasikan di titik $\xi = 0$ dan menggunakan relasi pertama pada persamaan (32) menghasilkan syarat batas tambahan pertama

$$\left.\frac{\partial^2\Theta(\xi, Fo)}{\partial\xi^2}\right|_{\xi=0} - \left.\frac{\partial\Theta(\xi, Fo)}{\partial\xi}\right|_{\xi=0} = 0. \tag{33}$$

Persamaan (23) ditulis pada titik $\xi = 1$ dan menggunakan relasi kedua pada (32) menghasilkan syarat batas tambahan kedua

$$\left.\frac{\partial^2\Theta(\xi, Fo)}{\partial\xi^2}\right|_{\xi=1} = \frac{1}{2}\frac{dq_2(Fo)}{dFo}. \tag{34}$$

Untuk mendapatkan syarat batas tambahan ketiga, persamaan (23) didiferensiasikan terhadap ξ dan ditulis pada titik $\xi = 1$ dan menggunakan relasi ketiga pada (32) menghasilkan syarat batas tambahan ketiga

$$\left.\frac{\partial^3\Theta(\xi, Fo)}{\partial\xi^3}\right|_{\xi=1} = 0. \tag{35}$$

Dengan menggunakan syarat batas (25), (33), (34), dan (35), enam koefisien dari suku banyak (27) dapat ditentukan. Substitusi (27) ke syarat batas tersebut menghasilkan persamaan linear untuk koefisien tak diketahui b_k, $k = \overline{0,5}$:

$$\begin{gathered}
(b_0 + b_1\xi + b_2\xi^2 + b_3\xi^3 + b_4\xi^4 + b_5\xi^5)_{\xi=0} = 1, \\
b_0 + b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 = q_2, \\
b_1 + 2b_2 + 3b_3 + 4b_4 + 5b_5 = 0, \\
2b_2 - b_1 = 0, \\
2b_2 + 6b_3 + 12b_4 + 20b_5 = \frac{1}{2}\frac{dq_2}{dFo}, \\
6b_3 + 24b_4 + 60b_5 = 0.
\end{gathered} \tag{36}$$

Penyelesaian sistem persamaan (36) adalah

$$\begin{aligned}
&b_0 = 1, && b_1 = \frac{20}{9}(q_2 - 1) + \frac{1}{6}\frac{dq_2}{dFo}, \\
&b_2 = \frac{10}{9}(q_2 - 1) + \frac{1}{12}\frac{dq_2}{dFo}, && b_3 = \frac{20}{3}(1 - q_2) - \frac{dq_2}{dFo}, \\
&b_4 = \frac{55}{9}(q_2 - 1) + \frac{13}{12}\frac{dq_2}{dFo}, && b_5 = \frac{16}{9}(1 - q_2) - \frac{1}{3}\frac{dq_2}{dFo}.
\end{aligned} \tag{37}$$

Substitusi koefisien ini ke persamaan (27) menghasilkan

$$\begin{aligned}
\Theta(\xi, Fo) = 1 &+ \frac{1}{9}(20\xi + 10\xi^2 - 60\xi^3 + 55\xi^4 - 16\xi^5)(q_2 - 1) \\
&+ \left(\frac{1}{6}\xi + \frac{1}{12}\xi^2 - \xi^3 + \frac{13}{12}\xi^4 - \frac{1}{3}\xi^5\right)\frac{dq_2}{dFo}.
\end{aligned} \tag{38}$$

Masukkan (38) ke (26), diperoleh persamaan diferensial biasa homogen orde dua untuk fungsi tak diketahui $q_2(Fo)$:

$$\frac{13}{1008}q_2'' + \frac{173}{378}q_2' + \frac{20}{9}q_2 - \frac{20}{9} = 0. \tag{39}$$

Syarat awal untuk persamaan (39) mempunyai bentuk

$$q_2(Fo_1) = 0, \left.\frac{dq_2}{dFo}\right|_{Fo=Fo_1} = 0. \tag{40}$$

Persamaan karakteristik untuk persamaan (40) adalah

$$\frac{13}{1008}z^2 + \frac{173}{378}z + \frac{20}{9} = 0.$$

Akar dari persamaan ini adalah $z_1 = -5.8051$ dan $z_2 = -29.6820$. Oleh karena itu, solusi umum untuk persamaan (39) adalah

$$q_2(Fo) = C_1 exp(-5.8051Fo) + C_2 exp(-29.682Fo), \tag{41}$$

dengan konstanta C_1 dan C_2 ditentukan dari syarat awal (40), yaitu

$$C_1 = -1.2431exp(5.8051Fo_1), C_2 = 0.2431exp(29.682Fo_1).$$

Masukkan C_1 dan C_2 ke (41) menghasilkan

$$q_2(Fo) = -1.2431exp[-5.8051(Fo - Fo_1)] + 0.2431exp[-29.682(Fo - Fo_1)].$$

Substitusi $q_2(Fo)$ ke (38), didapatkan hasil akhir solusi untuk masalah (23)-(25) dengan pendekatan kedua pada tahap kedua dari proses pemanasan:

$$\begin{aligned}\Theta(\xi, Fo) = 1 - (&1.56\xi + 0.78\xi^2 - 1.071\xi^3 - 0.221\xi^4 \\ &+ 0.195\xi^5)exp[-5.8051(Fo - Fo_1)] \\ &- (0.662\xi + 0.331\xi^2 - 5.596\xi^3 + 6.332\xi^4 \\ &- 1.973\xi^5)exp[-29.682(Fo - Fo_1)],\end{aligned} \tag{42}$$

dengan Fo_1 adalah angka yang didapat dari pendekatan kedua pada tahap pertama: $Fo_1 = 0.042$.

Misalkan pemanasan pada tabung tak terhingga dengan jari-jari 0.1 m dan difusivitas termal $\alpha = 12.5 \times 10^{-6}$ m^2/s. Jika suhu dalam tabung adalah 25^oC dan suhu permukaan tabung adalah 50^oC, maka dapat ditentukan suhu pada pemanasan tahap pertama dengan waktu penyelesaian ($q_1 = 1$) adalah

$$t = \frac{Fo_1 \times R^2}{\alpha} = 33.6 \text{ s}$$

dan

$$\Theta(\xi, Fo_1) = 1 - \frac{20\xi}{9} - \frac{10\xi^2}{9} + \frac{60\xi^3}{9} - \frac{55\xi^4}{9} + \frac{16\xi^5}{9}.$$

Untuk $\xi = \frac{1}{2}$,

$$\Theta(\xi, Fo_1) = \frac{17}{144},$$

sehingga

$$\Theta\left(\frac{1}{2}, Fo_1\right) = \frac{T(r,t) - 25^o\text{C}}{50^o\text{C} - 25^o\text{C}} = \frac{17}{144}$$

$$T(r,t) = \frac{350}{144} + \frac{3600}{144} = 27.43^o\text{C},$$

dengan $t = 33.6$ s dan $r = \delta R = (1 - \xi)R = \left(1 - \frac{1}{2}\right)0.1 = 0.05$ m. Selanjutnya akan dicari suhu pada posisi $r = 0.05$ m ($\xi = \frac{1}{2}$) pada waktu ke $t = 40$ s ($Fo = 0.05$) dengan menggunakan persamaan (42)

$$\Theta\left(\frac{1}{2}, 0.05\right) = 0.16628$$

Sehingga

$$\Theta\left(\frac{1}{2}, 0.05\right) = \frac{T(0.05\text{ m}, 40\text{ s}) - 25^o\text{C}}{50^o\text{C} - 25^o\text{C}} = 0.16628$$

$$T(0.05\text{ m}, 40\text{ s}) = (0.16628 \times 25^o\text{C}) + 25^o\text{C} = 29.157^o\text{C}.$$

Dapat disimpulkan waktu yang diperlukan untuk menyelesaikan tahap pertama adalah $t = 33.6$ s dan pada waktu ke-40 s, suhu pada posisi tabung $r = 0.05$ m dari pusat lingkaran adalah sebesar 29.157^oC.

KESIMPULAN

Hasil dari penelitian berikut memberikan kesimpulan bahwa metode integral keseimbangan panas digunakan untuk mendapatkan pendekatan solusi analitik untuk masalah konduksi panas untuk pemasasan (pendinginan) pada tabung dengan langkah sebagai berikut:

a). Persamaan konduksi panas diintegralkan terhadap $q(Fo)$, yang disebut kedalaman penetrasi, sehingga didapat integral keseimbangan panas.
b). Representasi fungsi suhu dengan polinomial. Koefisien polinomial diperoleh dari syarat batas dasar dan syarat batas tambahan.
c). Setelah fungsi suhu dikonstruksikan dan disubstitusi pada integral keseimbangan panas diperoleh persamaan diferensial biasa untuk $q(Fo)$ dan Fo. solusinya berupa fungsi q yang bergantung pada Fo.
d). Setelah diperoleh fungsi $q(Fo)$, dapat ditentukan juga distribusi suhu $\Theta(\xi, Fo)$ sebagai fungsi posisi dan waktu.

Kelebihan dari metode integral keseimbangan panas yaitu dapat diterapkan pada permasalah konduksi panas nonlinear, sehingga asumsi yang digunakan dapat berupa persamaan nonlinear. Sedangkan kelemahan dari metode ini adalah perlunya asumsi suhu awal konstan di setiap titik pada tabung.

REFERENSI

[1] Antimonov, M. A., Kudinov, V. A., & Stefanyuk, E. V. (2008). *Analytical Solutions to the Heat Conduction Problems for a Cylinder and a Ball Based on Determining the Temperature Perturbation Front.* Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz. (hal. 681-692). Samara: Pleiades Publishing, Ltd.
[2] Boyce, W. E., & DiPrima, R. C. (2000). *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problem*. New York: John Wiley & Sons, Inc.
[3] Cengel, Y. (2002). *Heat Transfer: A Practical Approach*. Columbus: Mcgraw-Hill.
[4] Goodman, T. R. (1964). *Application of integral Methods to Transient Nonlinear Heat Transfer*. Advances in Heat Transfer (hal. 51-122). New York: Academic.
[5] Ozisik, M. N. (1993). *Heat Conduction*. United States of America: John Wiley & Sons, inc.