

## **PENYELESAIAN MASALAH SYARAT BATAS PERSAMAAN HELMHOTZ MENGGUNAKAN DUAL RECIPROCITY BOUNDARY ELEMENT METHOD**

**Muhammad Manaqib**

Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi  
Universitas Islam Negeri Syarif Hidayatullah Jakarta  
[muhammad.manaqib@uinjkt.ac.id](mailto:muhammad.manaqib@uinjkt.ac.id)

**Abstract:** Helmholtz equation is partial differential equation of elliptic type which involves space variable and considers the boundary problem. The boundary condition follows some physics laws formulated at the domain boundaries where solutions are needed. It is complicated to solve the analytical solution of Boundary Element Method (BEM) of Helmholtz equation since the fundamental solution is hard to solve and not singular. Hence, numerical method be the alternative: Dual Reciprocity Boundary Element Method (DRBEM). DRBEM is developed from Boundary Element Method (BEM) to obtain the fundamental solution of Partial Differential Equations (PDE). This research explains how to solve BEM of Helmholtz equation using DRBEM and shows its numerical simulation. There are six stages to complete boundary value problem of Helmholtz equation. The numerical result obtained using DRBEM indicates that the method can produce accurate numerical solutions.

**Keywords:** *boundary value problem, Helmholtz equation, Dual Reciprocity Boundary Element Method.*

**Abstrak:** Persamaan Helmholtz merupakan persamaan diferensial parsial tipe eliptik yang melibatkan variabel ruang dan mempertimbangkan masalah syarat batas. Kondisi batas mengikuti hukum-hukum fisika tertentu yang dirumuskan pada batas-batas domain dimana solusi diperlukan. Penyelesaian analitik masalah syarat batas (MSB) persamaan Helmholtz relative sulit dilakukan karena solusi fundamentalnya sulit dicari dan tidak tunggal. Alternatif yang dapat dilakukan adalah dengan menggunakan pendekatan metode numerik *Dual Reciprocity Boundary Element Method*(DRBEM). DRBEM adalah pengembangan dari *Boundary Element Method* (BEM) untuk menyelesaikan PDP yang sulit dicari solusi fundamentalnya. Penelitian ini akan membahas bagaimana menyelesaikan MSB Persamaan Helmholtz menggunakan DRBEM dan melakukan simulasi numerik. Hasilnya diperoleh enam tahapan untuk menyelesaikan MSB Persamaan Helmholtz. Hasil numerik yang diperoleh dengan menggunakan DRBEM mengindikasikan bahwa DRBEM dapat menghasilkan solusi numerik yang cukup akurat.

**Kata kunci:** *masalah syarat batas, persamaan Helmholtz, Metode Dual Reciprocity Boundary Element.*

### **PENDAHULUAN**

Persamaan Helmholtz diambil dari nama ilmuwan Jerman Hermann von Helmholtz. Persamaan ini muncul alami dari hukum kekekalan umum fisika dan dapat diartikan sebagai suatu persamaan gelombang monokromatik. Persamaan Helmholtz juga dapat diturunkan dari persamaan konduksi panas, persamaan Schrodinger, persamaan telegraf, dan persamaan telegram. Persamaan Helmholtz merupakan persamaan diferensial parsial dari tipe eliptik yang

melibatkan variabel ruang dan mempertimbangkan masalah syarat batas. Kondisi batas mengikuti hukum-hukum fisika tertentu yang dirumuskan pada batas-batas domain dimana solusi diperlukan. Penyelesaian analitik masalah syarat batas (MSB) persamaan Helmholtz relative sulit dilakukan, terlebih jika domain tidak beraturan dan melibatkan syarat batas campuran. Alternatif yang dapat dilakukan adalah dengan menggunakan pendekatan metode numerik. Salah satu metode numerik yang dapat digunakan adalah *Dual Reciprocity Boundary Elemen Method* (DRBEM).

DRBEM adalah bagian/pengembangan dari *Boundary Elemen Method* (BEM) atau dalam Bahasa Indonesia disebut Metode Elemen Batas (MEB). MEB adalah metode numerik yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial parsial yang ditemui pada fisika matematis dan teknik. Seperti, Persamaan Laplace, Persamaan Helmholtz, Persamaan Konveksi Difusi, Persamaan Potensial dan Aliran Viskos, Persamaan Elektrostatis dan Elektromagnetik, serta Persamaan Linear Elastostatik dan Elastodynamik [2]. Ide utama Metode Elemen Batas adalah solusi dari PDP tersebut diekspresikan dalam persamaan integral batas yang mengandung solusi fundamental dari PDP tersebut [4]. Tidak semua PDP mudah dicari solusi fundamentalnya, contohnya Persamaan Helmholtz yang solusi fundamentalnya sulit dicari dan tidak tunggal. Oleh karena itu, dikembangkanlah DRBEM sebagai pengembangan dari MEB untuk menyelesaikan PDP yang sulit dicari solusi fundamentalnya.

Terdapat beberapa kelebihan MEB dibandingkan metode numerik yang lainnya, seperti *Finite Element Method* (FEM) dan *Finite Difference Method* (FDM). Berikut beberapa kelebihan tersebut [3]:

- a) Diskritisasi hanya dilakukan pada batas domain, sehingga membuat pemodelan numerik dengan MEB lebih sederhana dan mereduksi jumlah titik kolokasi yang diperlukan.
- b) MEB yang dimodifikasi dapat menyelesaikan masalah dengan domain tak terbatas.
- c) MEB terbukti efektif pada perhitungan turunan dari lapangan fungsi seperti *flux*, tegangan, tekanan, dan momen. MEB juga dapat menyelesaikan konsentrasi gaya dan momen pada interior domain dan batas domain.
- d) Menggunakan satu himpunan titik kolokasi yang terletak pada batas-batas domain dapat digunakan untuk mencari solusi di semua titik pada domain. Berbeda dengan FEM dan FDM yang solusinya diperoleh hanya di titik kolokasi.
- e) MEB juga dapat menyelesaikan masalah dengan domain yang rumit, seperti sebuah retakan.

Berdasarkan uraian diatas DRBEM sangat baik untuk menyelesaikan MSB Persamaan Helmholtz. Sehingga dalam penelitian ini akan dibahas bagaimana menyelesaikan MSB Persamaan Helmholtz menggunakan DRBEM. Selanjutnya juga akan dilakukan simulasi numerik untuk melihat keakuratan DRBEM dalam menyelesaikan MSB Persamaan Helmholtz.

## DASAR TEORI

### Masalah Syarat Batas

Solusi dari suatu persamaan diferensial, baik persamaan diferensial biasa (PDB) maupun persamaan diferensial parsial (PDP) tidaklah tunggal. Jika solusi pada PDB ketidaktunggalan dinyatakan dalam konstanta, maka ketidaktunggalan pada PDP dinyatakan dengan fungsi. Ketunggalan solusi persamaan diferensial dapat diperoleh jika persamaan diferensial tersebut dilengkapi syarat awal dan atau syarat batas. Syarat awal adalah suatu syarat atau kondisi yang harus dipenuhi pada awal waktu tertentu, sedangkan syarat batas adalah suatu syarat atau kondisi yang harus dipenuhi pada batas-batas domain yang terkait dengan ruang. Untuk

PDP order  $n$  dengan variabel tak bebas  $u$ , syarat batas dapat meliputi nilai fungsi tak diketahui  $u$  dan turunannya sampai order  $n-1$  pada batas-batas domain.

Suatu syarat batas dikatakan linear jika pada batas domain, syarat batas tersebut dinyatakan dalam relasi linear antara  $u$  dan turunan-turunannya. Syarat batas linear diklasifikasikan sebagai berikut. Diberikan PDP order 2 yang terdefinisi pada domain  $D \in \mathbb{R}^2$  dengan himpunan semua titik batas domain dinyatakan dengan  $C$ .

1. Syarat batas Dirichlet

Syarat batas Dirichlet adalah syarat batas yang memberikan nilai fungsi tidak diketahui  $u$  pada  $C$ ,

$$u = \bar{u} \text{ pada } C,$$

dengan  $\bar{u}$  adalah fungsi yang telah diketahui dan terdefinisi pada kurva  $C$ .

2. Syarat batas Neumann

Syarat batas Neumann adalah syarat batas yang memberikan nilai turunan  $u$  pada arah normal terhadap  $C$  yang ditulis dengan  $\frac{\partial u}{\partial n}$ , dengan  $n$  adalah vektor normal arah keluar terhadap  $C$ ,

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \bar{u}_n \text{ pada } C,$$

dengan  $\bar{u}_n$  adalah fungsi yang diketahui dan terdefinisi pada kurva  $C$ .

3. Syarat batas Robin

Syarat batas Robin adalah syarat batas yang memberikan relasi linear antara  $u$  dan  $\frac{\partial u}{\partial n}$  pada  $C$ .

$$\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ pada } C.$$

### Metode Elemen Batas (MEB)

Metode Elemen Batas (*Boundary Element Method*) adalah metode numerik yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial parsial (PDP) yang ditemui pada fisika matematis dan teknik. Seperti Persamaan Laplace, Persamaan Helmholtz, Persamaan Konveksi Difusi, Persamaan Potensial dan Aliran Viskos, Persamaan Elektrostatis dan Elektromagnetik, serta Persamaan Linear Elastostatik dan Elastodinamik [6].

Ide utama metode elemen batas adalah solusi dari PDP tersebut diekspresikan dalam persamaan integral batas yang menggandung solusi fundamental dari PDP, oleh karena itu Teorema Gauss-Green dan Identitas Kedua Green berperan penting dalam metode ini. Metode ini dinamakan metode elemen batas karena diskritisasi dilakukan pada batas domain dengan membagi menjadi ruas-ruas/segmen garis yang berhingga yang selanjutnya digunakan untuk mengevaluasi persamaan integral batasnya.

Metode Elemen Batas mulai berkembang pada abad ke-19, yang pada awalnya dikenal dengan istilah *Boundary Integral Equation Method* (BIEM), sebagai metode untuk menyelesaikan masalah fisika matematis. Pertamakali dikerjakan oleh G.Green pada tahun 1828 yaitu masalah syarat batas Dirichlet dan Neuman dari Persamaan Laplace dibentuk dalam integral solusinya, sehingga bentuk seperti ini disebut sebagai Fungsi Green [3]. Semenjak penemuan Fungsi Green tersebutlah banyak para peneliti yang mengembangkan Metode Elemen Batas.

### Teorema Gauss-Green dan Identitas Kedua Green

**Teorema 1.** Teorema Gauss-Green [3]

Diberikan fungsi  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dan  $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  yang kontinu dan terdiferensial pada domain  $D \subseteq \mathbb{R}^2$ . Misalkan  $R \subseteq D$  suatu daerah yang dibatasi oleh kurva tertutup sederhana  $C$ , maka berlaku

$$\iint_R g \frac{\partial f}{\partial x} dx dy = - \iint_R f \frac{\partial g}{\partial x} dx dy + \int_C fg n_x ds, \text{ dan}$$

$$\iint_R g \frac{\partial f}{\partial y} dx dy = - \iint_R f \frac{\partial g}{\partial y} dx dy + \int_C fg n_y ds.$$

**Teorema 2.** Identitas Kedua Green [3]

Diberikan fungsi  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dan  $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  yang terdiferensial sampai tingkat kedua dan diferensiabel tingkat keduanya kontinu pada domain  $D \subseteq \mathbb{R}^2$ . Misalkan  $R \subseteq D$  suatu daerah yang dibatasi oleh kurva tertutup sederhana  $C$ , maka berlaku

$$\iint_R (g \nabla^2 f - f \nabla^2 g) dx dy = \int_C \left( g \frac{\partial f}{\partial n} - f \frac{\partial g}{\partial n} \right) ds \quad (1)$$

dengan  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} i + \frac{\partial^2}{\partial y^2} j$  dan  $\frac{\partial f}{\partial n} = \frac{\partial f}{\partial x} n_x + \frac{\partial f}{\partial y} n_y$ .

Identitas Kedua Green memiliki peranan penting dalam pembahasan Metode Elemen Batas, karena menghubungkan integral pada suatu domain dengan integral pada batas domain. Manfaat dari teorema ini dapat mereduksi dimensi dari domain menjadi berkurang satu dimensi.

### Persamaan Laplace

Persamaan Laplace adalah persamaan diferensial parsial (PDP) tingkat dua yang berbentuk [2],

$$\nabla^2 \phi(x, y) = 0, \quad (x, y) \in R, \quad (2)$$

dengan  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} i + \frac{\partial^2}{\partial y^2} j$ .

Solusi dari Persamaan Laplace sangatlah banyak, misalkan  $\phi = x + y, \phi = x^2 + y^2$ , dll. Sehingga untuk solusi Persamaan Laplace yang tunggal, Persamaan Laplace dilengkapi dengan syarat batas. Persamaan diferensial parsial yang dilengkapi dengan syarat batas dalam matematika dikenal dengan istilah Masalah Syarat Batas (MSB).

Diketahui titik  $p_0(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2$ , ditinjau persamaan

$$\nabla^2 \phi(x - \xi, y - \eta) = \delta(p - p_0). \quad (3)$$

Solusi khusus/singular Persamaan (3) disebut solusi fundamental Persamaan Laplace [3]. Solusi dari Persamaan (3) adalah

$$\begin{aligned}\phi(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \ln \left( \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} \right) \text{ atau} \\ \phi(x, y) &= \frac{1}{4\pi} \ln \left( (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 \right), \text{ dengan } x \neq \xi \text{ dan } y \neq \eta.\end{aligned}\tag{4}$$

Persamaan (4) inilah yang disebut dengan solusi fundamental Persamaan Laplace dimensi dua. Solusi fundamental Persamaan Laplace (3) juga dikenal sebagai fungsi Green dari operator Laplace pada domain keseluruhan  $\mathbb{R}^2$ , sehingga solusi ini tidak bergantung pada syarat batas.

## HASIL DAN PEMBAHASAN

Penelitian ini akan membahas tentang bagaimana menyelesaikan Persamaan Helmholtz dua dimensi dengan syarat batas yang diketahui. Persamaan Helmholtz tersebut memiliki domain  $R$ , suatu daerah tertutup dan terbatas oleh kurva sederhana  $C$ . Berikut dituliskan Persamaan Helmholtz dua dimensi dengan syarat batas campuran.

$$\frac{\partial^2 \phi(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi(x, y)}{\partial y^2} + k^2 \phi(x, y) = g(x, y), (x, y) \in R,\tag{5}$$

dengan syarat batas  $\phi = f_1(x, y)$  untuk  $(x, y) \in C_1$ , dan  $\frac{\partial \phi}{\partial n} = f_2(x, y)$  untuk  $(x, y) \in C_2$ , dimana  $C_1$  dan  $C_2$  adalah dua buah kurva yang tidak berpotongan sedemikian sehingga  $C_1 \cup C_2 = C$ . Penyelesaian Persamaan (5) menggunakan MEB memerlukan solusi fundamental Persamaan (5), sedangkan menentukan solusi fundamental Persamaan (5) cukup sulit dan tidak tunggal [3]. Alternatif penyelesaiannya menggunakan *Dual Reciprocity Boundary Element Method* (DRBEM), karena DRBEM tidak memerlukan solusi fundamental Persamaan Helmholtz, cukup dengan solusi fundamental dari Persamaan Laplace. Berikut dijelaskan prosedur penyelesaian dengan DRBEM.

### Formulasi Integral

Sebelumnya telah diketahui bahwa solusi fundamental Persamaan Laplace adalah

$$\Phi(x, y; \xi, \eta) = \frac{1}{4\pi} \ln \left( (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 \right).\tag{6}$$

Menggunakan solusi fundamental Persamaan Laplace yang diberikan oleh Persamaan (6) inilah akan diturunkan formulasi integral untuk Persamaan Helmholtz (5). Jika  $\phi_1$  dan  $\phi_2$  adalah solusi Persamaan Poisson

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \sigma,$$

pada domain daerah  $R$  yang tertutup dan terbatas oleh kurva sederhana  $C$ , maka  $\phi_1$  dan  $\phi_2$  memenuhi Persamaan Poisson tersebut, diperoleh

$$\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial y^2} = \sigma_1, \quad (7)$$

$$\frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial y^2} = \sigma_2. \quad (8)$$

Kalikan Persamaan (7) dengan  $\phi_2$  dan kalikan Persamaan (8) dengan  $\phi_1$ , sehingga diperoleh

$$\phi_2 \left( \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial y^2} \right) = \phi_2 \sigma_1, \quad (9)$$

$$\phi_1 \left( \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial y^2} \right) = \phi_1 \sigma_2. \quad (10)$$

Kurangkan persamaan (9) dan (10), maka diperoleh

$$\phi_2 \left( \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial y^2} \right) - \phi_1 \left( \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial y^2} \right) = \phi_2 \sigma_1 - \phi_1 \sigma_2. \quad (11)$$

Selanjutnya, integralkan kedua ruas Persamaan (11) pada domain  $R$  dan gunakan Identitas Kedua Green (1), diperoleh

$$\int_C \left( \phi_2 \frac{\partial \phi_1}{\partial n} - \phi_1 \frac{\partial \phi_2}{\partial n} \right) ds = \iint_R (\phi_2 \sigma_1 - \phi_1 \sigma_2) dx dy. \quad (12)$$

Jadi diperoleh Persamaan (12) sebagai *relasi reciprocal* Persaman Poisson.

Menggunakan *relasi reciprocal* Persamaan Poisson yang diberikan oleh Persamaan (12) akan diturunkan persamaan integral untuk Persamaan Helmholtz (5). Misalkan dipilih  $\phi_1 = \Phi(x, y; \xi, \eta)$  dan  $\phi_2 = \phi(x, y)$ , dimana  $\Phi(x, y; \xi, \eta)$  adalah solusi fundamental Persamaan Laplace yang diberikan oleh Persamaan (4) dan  $\phi(x, y)$  adalah solusi Persamaan Helmholtz yang akan dicari pada domain  $R \cup C$ . Akibatnya,  $\sigma_1 = 0$  dan  $\sigma_2 = g(x, y) - k^2 \phi(x, y)$ , serta diperoleh *relasi reciprocal*.

$$\int_C \left( \Phi \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right) ds = \iint_R \Phi (g - k^2 \phi) dx dy. \quad (13)$$

Jadi diperoleh *relasi reciprocal* antara  $\Phi(x, y; \xi, \eta)$  dan  $\phi(x, y)$

$$\int_C \left( \Phi(x, y; \xi, \eta) \frac{\partial \phi(x, y)}{\partial n} - \phi(x, y) \frac{\partial \Phi(x, y; \xi, \eta)}{\partial n} \right) ds(x, y) = \iint_R \Phi(x, y; \xi, \eta) (g(x, y) - k^2 \phi(x, y)) dx dy, \quad (14)$$

dengan  $(\xi, \eta) \neq (x, y)$ .

Karena  $\Phi(x, y; \xi, \eta)$  tidak terdefinisi pada titik  $(\xi, \eta)$ , *relasi reciprocal* (14) benar jika  $(\xi, \eta)$  tidak terletak pada domain  $R \cup C$ . Sehingga, diperoleh

$$\int_C \left( \Phi(x, y; \xi, \eta) \frac{\partial \phi(x, y)}{\partial n} - \phi(x, y) \frac{\partial \Phi(x, y; \xi, \eta)}{\partial n} \right) ds(x, y) = \iint_R \Phi(x, y; \xi, \eta) (g(x, y) - k^2 \phi(x, y)) dx dy, \quad (15)$$

Jika  $(\xi, \eta) \notin (x, y)$ . Tujuan akhir adalah mencari solusi Persamaan Helmholtz pada domainnya yaitu  $R \cup C$ , sedangkan Persamaan (15) hanya terdefinisi untuk  $(\xi, \eta) \notin R \cup C$ , maka perlu dilakukan modifikasi domain jika  $(\xi, \eta) \in R$  dan  $(\xi, \eta) \in C$ . Modifikasi domain yang dilakukan analog dengan Metode Elemen Batas[5], sehingga diperoleh

$$\lambda(\xi, \eta) \phi(\xi, \eta) = \int_C \left( \phi(x, y) \frac{\partial \Phi(x, y; \xi, \eta)}{\partial n} - \Phi(x, y; \xi, \eta) \frac{\partial \phi(x, y)}{\partial n} \right) ds + \iint_R \Phi(x, y; \xi, \eta) (g(x, y) - k^2 \phi(x, y)) dx dy, \quad (16)$$

$$\text{dengan } \lambda(\xi, \eta) = \begin{cases} 0, & \text{jika } (\xi, \eta) \notin R \cup C \\ \frac{1}{2}, & \text{jika } (\xi, \eta) \text{ pada bagian } \textit{smooth} C. \\ 1, & \text{jika } (\xi, \eta) \in R \end{cases}$$

Persamaan (16) inilah yang disebut sebagai persamaan integral batas Persamaan Helmholtz.

### Pendekatan Integral Domain

Diperhatikan bahwa ruas kanan Persamaan (16) masih mengandung integral domain  $R$ , maka diperlukan pendekatan nilai interal domain tersebut. Salah satu yang dapat digunakan adalah pendekatan menggunakan kombinasi linear fungsi basis radial. Fungsi basis radial  $\rho$  yang berpusat di  $(a, b)$  adalah sebuah fungsi yang berbentuk  $\rho(x, y; a, b) = G(r(x, y; a, b))$ , dengan  $r(x, y; a, b) = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$ . Atau dapat dikatakan  $\rho(x, y; a, b)$  adalah fungsi yang bergantung pada jarak antara titik  $(x, y)$  dan  $(a, b)$ .

Diambil sebanyak  $M$  titik kolokasi yang terletak pada  $R \cup C$  dan namakan titik – titik kolokasi tersebut dengan  $(a^{(m)}, b^{(m)})$ ,  $m = 1, 2, \dots, M$ . Selanjutnya akan didekati  $g(x, y) - k^2 \phi(x, y)$  menggunakan jumlahan fungsi-fungsi basis radial yang berpusat di titik-titik kolokasi tersebut.

$$g(x, y) - k^2 \phi(x, y) \approx \sum_{m=1}^M \beta^{(m)} \rho(x, y; a^{(m)}, b^{(m)}), \quad (17)$$

dengan  $\beta^{(m)}$  adalah konstanta yang akan dicari nilainya. Menurut [7], untuk pendekatan yang baik titik kolokasi yang dipilih sebagian terletak pada daerah domain  $R$  dan sebagian pada batas domain  $C$ .

Keberhasilan DRBEM bergantung terhadap fungsi basis radial yang dipilih. Penelitian ini akan menggunakan fungsi basis radial polynomial  $\rho(x, y; a, b) = 1 + r^2(x, y; a, b) + r^3(x, y; a, b)$ , karena menurut [1] dengan fungsi basis radial tersebut akurasi yang diberikan cukup baik dengan jumlah titik koloasi yang cukup sedikit.

Menggunakan Persamaan (17), double integral atau integral domain  $R$  pada Persamaan (16) dapat didekati sebagai berikut,

$$\begin{aligned} \iint_R \Phi(x, y; \xi, \eta) (g(x, y) - k^2 \phi(x, y)) dx dy &\approx \\ \sum_{m=1}^M \beta^{(m)} \iint_R \Phi(x, y; \xi, \eta) \rho(x, y; a^{(m)}, b^{(m)}) dx dy. \end{aligned} \quad (18)$$

Selanjutnya akan dicari evaluasi dari

$$\beta^{(m)} \iint_R \Phi(x, y; \xi, \eta) \rho(x, y; a^{(m)}, b^{(m)}) dx dy.$$

Perhatikan penjelasan berikut.

Akan dicari fungsi  $\chi(x, y; a, b)$  yang memenuhi

$$\frac{\partial^2 \chi(x, y, a, b)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \chi(x, y, a, b)}{\partial y^2} = \rho(x, y, a, b).$$

Digunakan *relasi reciprocal* Persamaan (12) dengan  $\phi_1 = \Phi(x, y; \xi, \eta)$ ,  $\phi_2 = \chi(x, y; a, b)$ ,  $\sigma_1 = 0$ , dan  $\sigma_2 = \rho(x, y; a, b)$ , maka diperoleh

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \iint_R \Phi(x, y; \xi, \eta) \rho(x, y; a, b) dx dy &= \lambda(\xi, \eta) \chi(\xi, \eta; a, b) + \\ \int_c \left( \Phi(x, y; \xi, \eta) \frac{\partial \chi(x, y; a, b)}{\partial n} - \chi(x, y; a, b) \frac{\partial \Phi(x, y; \xi, \eta)}{\partial n} \right) ds. \end{aligned} \quad (19)$$

Misalkan,

$$\begin{aligned} \Psi(\xi, \eta; a, b) &= \lambda(\xi, \eta) \chi(\xi, \eta; a, b) + \\ \int_c \left( \Phi(x, y; \xi, \eta) \frac{\partial \chi(x, y; a, b)}{\partial n} - \chi(x, y; a, b) \frac{\partial \Phi(x, y; \xi, \eta)}{\partial n} \right) ds, \end{aligned}$$

sehingga Persamaan (19) menjadi

$$\iint_R \Phi(x, y; \xi, \eta) \rho(x, y; a, b) dx dy = \Psi(\xi, \eta; a, b). \quad (20)$$

dapat dibuktikan bahwa

$$\chi(x, y; a, b) = \frac{1}{4} r^2(x, y; a, b) + \frac{1}{16} r^4(x, y; a, b) + \frac{1}{25} r^5(x, y; a, b).$$



Selanjutnya, untuk mendapatkan nilai  $\beta^{(m)}$  substitusikan  $(x, y) = (a^{(j)}, b^{(j)})$   $j = 1, 2, \dots, M$  ke Persamaan (17), dengan  $(a^{(j)}, b^{(j)})$  adalah titik-titik kolokasi yang telah ditentukan sebelumnya. Diperoleh

$$g(a^{(j)}, b^{(j)}) - k^2 \phi(a^{(j)}, b^{(j)}) \sum_{m=1}^M \beta^{(m)} \rho((a^{(j)}, b^{(j)}); a^{(m)}, b^{(m)}) \text{ untuk } j = 1, 2, \dots, M. \quad (21)$$

Persamaan (21) dapat diubah dalam persamaan matriks

$$\mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{C}$$

$$\text{dengan } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} g(a^{(1)}, b^{(1)}) - k^2 \phi(a^{(1)}, b^{(1)}) \\ g(a^{(2)}, b^{(2)}) - k^2 \phi(a^{(2)}, b^{(2)}) \\ g(a^{(3)}, b^{(3)}) - k^2 \phi(a^{(3)}, b^{(3)}) \\ \vdots \\ g(a^{(M)}, b^{(M)}) - k^2 \phi(a^{(M)}, b^{(M)}) \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \beta^{(1)} \\ \beta^{(2)} \\ \beta^{(3)} \\ \vdots \\ \beta^{(M)} \end{bmatrix}$$

dan

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \rho(a^{(1)}, b^{(1)}; a^{(1)}, b^{(1)}) & \dots & \rho(a^{(1)}, b^{(1)}; a^{(M)}, b^{(M)}) \\ \rho(a^{(2)}, b^{(2)}; a^{(1)}, b^{(1)}) & \dots & \rho(a^{(2)}, b^{(2)}; a^{(M)}, b^{(M)}) \\ \rho(a^{(3)}, b^{(3)}; a^{(1)}, b^{(1)}) & \dots & \rho(a^{(3)}, b^{(3)}; a^{(M)}, b^{(M)}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho(a^{(M)}, b^{(M)}; a^{(1)}, b^{(1)}) & \dots & \rho(a^{(M)}, b^{(M)}; a^{(M)}, b^{(M)}) \end{bmatrix}$$

Diasumsi bahwa matrik  $\mathbf{B}$  adalah matrik nonsingular, maka diperoleh

$$\mathbf{C} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}. \quad (22)$$

Misalkan

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} \omega(a^{(1)}, b^{(1)}; a^{(1)}, b^{(1)}) & \dots & \omega(a^{(M)}, b^{(M)}; a^{(1)}, b^{(1)}) \\ \omega(a^{(1)}, b^{(1)}; a^{(2)}, b^{(2)}) & \dots & \omega(a^{(M)}, b^{(M)}; a^{(2)}, b^{(2)}) \\ \omega(a^{(1)}, b^{(1)}; a^{(3)}, b^{(3)}) & \dots & \omega(a^{(M)}, b^{(M)}; a^{(3)}, b^{(3)}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega(a^{(1)}, b^{(1)}; a^{(M)}, b^{(M)}) & \dots & \omega(a^{(M)}, b^{(M)}; a^{(M)}, b^{(M)}) \end{bmatrix}$$

sehingga Persamaan (22) dapat ditulis

$$\beta^{(m)} = \sum_{j=1}^M \omega(a^{(j)}, b^{(j)}; a^{(m)}, b^{(m)}) [g(a^{(j)}, b^{(j)}) - k^2 \phi(a^{(j)}, b^{(j)})], \quad m = 1, 2, \dots, M \quad (23)$$

Jadi berdasarkan Persamaan (20) dan (23) diperoleh

$$\beta^{(m)} \iint_R \Phi(x, y; \xi, \eta) \rho(x, y; a^{(m)}, b^{(m)}) dx dy = \sum_{j=1}^M \omega(a^{(j)}, b^{(j)}; a^{(m)}, b^{(m)}) \left[ g(a^{(j)}, b^{(j)}) - k^2 \phi(a^{(j)}, b^{(j)}) \right] \Psi(\xi, \eta; a^{(m)}, b^{(m)}). \quad (24)$$

Akhirnya berdasarkan Persamaan (23) dan (24), diperoleh

$$\iint_R \Phi(x, y; \xi, \eta) (g(x, y) - k^2 \phi(x, y)) dx dy = \sum_{j=1}^M \left[ \sum_{m=1}^M \omega(a^{(j)}, b^{(j)}; a^{(m)}, b^{(m)}) \Psi(\xi, \eta; a^{(m)}, b^{(m)}) \right] \left[ g(a^{(j)}, b^{(j)}) - k^2 \phi(a^{(j)}, b^{(j)}) \right] \quad (25)$$

### Prosedur Dual Reciprocity Boundary Element Method

Persamaan (25) telah memberikan pendekatan untuk integral domain Persamaan (16), oleh karena itu Persamaan (16) dapat dituliskan sebagai berikut,

$$\lambda(\xi, \eta) \phi(\xi, \eta) = \sum_{j=1}^M \left[ \sum_{m=1}^M \omega(a^{(j)}, b^{(j)}; a^{(m)}, b^{(m)}) \Psi(\xi, \eta; a^{(m)}, b^{(m)}) \right] \times \left[ g(a^{(j)}, b^{(j)}) - k^2 \phi(a^{(j)}, b^{(j)}) \right] + \int_C \left( \phi(x, y) \frac{\partial \Phi(x, y; \xi, \eta)}{\partial n} - \Phi(x, y; \xi, \eta) \frac{\partial \phi(x, y)}{\partial n} \right) ds \quad (26)$$

untuk  $(\xi, \eta) \in R \cup C$ .

Persamaan (26) inilah yang disebut persamaan integral batas Persamaan Helmholtz dalam bentuk integral garis.

*Relasi Reciprocal* (12) digunakan dua kali dalam penurunan persamaan integral batas (26). Pertama digunakan untuk memperoleh persamaan integral batas Persamaan (16) dan yang kedua untuk memperoleh pendekatan integral domain Persamaan (16) yaitu yang berupa integral garis. Prosedur penggunaan *relasi reciprocal* dua kali dalam memperoleh persamaan integral batas inilah yang disebut prosedur *Dual Reciprocity Boundary Element Method* (DRBEM).

Selanjutnya untuk menyelesaikan Persamaan (26) dilakukan diskritisasi batas domain  $C$  menjadi  $N$  ruas garis. Namakan  $C^{(1)}, C^{(2)}, \dots, C^{(N)}$  dengan urutan berlawanan arah jarum jam. Pada setiap  $C^{(k)}, k = 1, 2, \dots, N$  dipilih titik tengahnya sebagai titik kolokasi (*collocation point*) dan namakan  $(\bar{x}^{(k)}, \bar{y}^{(k)})$ , yang akan digunakan untuk pendekatan integral batas  $C$  Persamaan (26). Diasumsikan pada ruas garis  $C^{(k)}, k = 1, 2, \dots, N$  nilai dari  $\phi(x, y)$  dan

$\frac{\partial \phi}{\partial n}(x, y)$  konstan yaitu

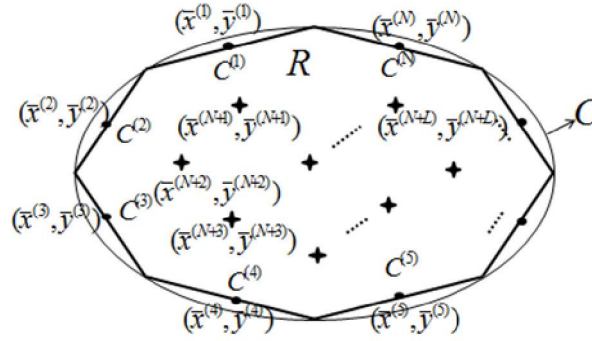
$$\phi(x, y) \approx \bar{\phi}^{(k)} \text{ dan } \frac{\partial \phi}{\partial n}(x, y) \approx \bar{p}^{(k)},$$

dengan  $\bar{\phi}^{(k)} = \phi(\bar{x}^{(k)}, \bar{y}^{(k)})$ ,  $\bar{p}^{(k)} = \left. \frac{\partial \phi}{\partial n} \right|_{(x, y) = (\bar{x}^{(k)}, \bar{y}^{(k)})}$ .

Sehingga, dengan diskritisasi atau  $C \approx C^{(1)} \cup C^{(2)} \cup \dots \cup C^{(N)}$  dan asumsi konstan tersebut diperoleh

$$\begin{aligned} & \int_C \left( \phi(x, y) \frac{\partial \Phi(x, y; \xi, \eta)}{\partial n} - \Phi(x, y; \xi, \eta) \frac{\partial \phi(x, y)}{\partial n} \right) ds \\ & \approx \sum_{k=1}^N \int_{C^{(k)}} \left( \bar{\phi}^{(k)} \frac{\partial \Phi}{\partial n}(x, y; \xi, \eta) - \Phi(x, y; \xi, \eta) \bar{p}^{(k)} \right) ds \\ & = \sum_{k=1}^N \left[ \bar{\phi}^{(k)} f_2^{(k)}(\xi, \eta) - \bar{p}^{(k)} f_1^{(k)}(\xi, \eta) \right]. \end{aligned} \quad (27)$$

Pendekatan integral domain yang diberikan oleh Persamaan (26) memerlukan titik kolokasi yang berada pada interior  $R$ , sehingga dari  $N$  titik kolokasi pada batas domain yang telah ada ditambah sebanyak  $L$  titik kolokasi yang berada pada interior  $R$ , yaitu  $(\bar{x}^{(k)}, \bar{y}^{(k)})$ ,  $k = N+1, N+2, \dots, N+L$ . Berikut diberikan gambar titik-titik kolokasi yang diperlukan pada DRBEM.



Gambar 1. Titik Kolokasi DRBEM

Menggunakan pendekatan integral domain yang diberikan oleh Persamaan (25) dan pendekatan integral batas menggunakan Persamaan (27), maka Persamaan (26) menjadi

$$\begin{aligned} \lambda(\xi, \eta) \phi(\xi, \eta) &= \sum_{j=1}^{N+L} \left[ \sum_{m=1}^{N+L} \omega(\bar{x}^{(j)}, \bar{y}^{(j)}; \bar{x}^{(m)}, \bar{y}^{(m)}) \Psi(\xi, \eta; \bar{x}^{(m)}, \bar{y}^{(m)}) \right] \times \\ & \left[ g(\bar{x}^{(j)}, \bar{y}^{(j)}) - k^2 \phi(\bar{x}^{(j)}, \bar{y}^{(j)}) \right] + \sum_{k=1}^N \left[ \bar{\phi}^{(k)} f_2^{(k)}(\xi, \eta) - \bar{p}^{(k)} f_1^{(k)}(\xi, \eta) \right] \end{aligned} \quad (28)$$

untuk  $(\xi, \eta) \in R \cup C$ .

Selanjutnya, substitusikan  $(\xi, \eta) = (\bar{x}^{(n)}, \bar{y}^{(n)})$ ,  $n = 1, 2, \dots, N+L$  ke Persamaan (28), sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \lambda(\bar{x}^{(n)}, \bar{y}^{(n)}) \phi(\bar{x}^{(n)}, \bar{y}^{(n)}) &= \sum_{j=1}^{N+L} \mu^{(nj)} \left[ g(\bar{x}^{(j)}, \bar{y}^{(j)}) - k^2 \phi(\bar{x}^{(j)}, \bar{y}^{(j)}) \right] \\ &+ \sum_{k=1}^N \left[ \phi^{(k)} f_2^{(k)}(\bar{x}^{(n)}, \bar{y}^{(n)}) - p^{(k)} f_1^{(k)}(\bar{x}^{(n)}, \bar{y}^{(n)}) \right] \text{ untuk } n = 1, 2, \dots, N+L \end{aligned} \quad (29)$$

Dengan  $\mu^{(nj)} = \sum_{m=1}^{N+L} \omega(\bar{x}^{(j)}, \bar{y}^{(j)}; \bar{x}^{(m)}, \bar{y}^{(m)}) \Psi(\bar{x}^{(n)}, \bar{y}^{(n)}; \bar{x}^{(m)}, \bar{y}^{(m)})$ .

Pendekatan nilai  $\mu^{(nj)}$  sebagai berikut

$$\begin{aligned} \mu^{(nj)} &= \sum_{m=1}^{N+L} \omega(\bar{x}^{(j)}, \bar{y}^{(j)}; \bar{x}^{(m)}, \bar{y}^{(m)}) \Psi(\bar{x}^{(n)}, \bar{y}^{(n)}; \bar{x}^{(m)}, \bar{y}^{(m)}) \\ &= \sum_{m=1}^{N+L} \left\{ \omega(\bar{x}^{(j)}, \bar{y}^{(j)}; \bar{x}^{(m)}, \bar{y}^{(m)}) \left( \lambda(\bar{x}^{(n)}, \bar{y}^{(n)}) \chi(\bar{x}^{(n)}, \bar{y}^{(n)}; \bar{x}^{(m)}, \bar{y}^{(m)}) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_{k=1}^N \left[ \left( n_x^{(k)} \frac{\partial \chi(x, y; \bar{x}^{(m)}, \bar{y}^{(m)})}{\partial x} + n_y^{(k)} \frac{\partial \chi(x, y; \bar{x}^{(m)}, \bar{y}^{(m)})}{\partial y} \right) \right]_{(x,y)=\bar{x}^{(k)}, \bar{y}^{(k)}} \times f_1^{(k)}(\bar{x}^{(n)}, \bar{y}^{(n)}) \right] \\ &\quad \left. - \sum_{k=1}^N \left[ \chi(\bar{x}^{(k)}, \bar{y}^{(k)}; \bar{x}^{(m)}, \bar{y}^{(m)}) f_2^{(k)}(\bar{x}^{(n)}, \bar{y}^{(n)}) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (30)$$

Diperhatikan bahwa Persamaan (29) merupakan SPL dengan  $N + L$  persamaan,  $N + L$  variabel yang belum diketahui.  $\beta^{(m)}$  atau  $\bar{\phi}^{(k)}$  merupakan variabel yang belum diketahui pada indeks  $k = 1, 2, \dots, N$ , bergantung pada syarat batas ruas garis  $C^{(k)}$  yang diketahui  $\phi^{(k)}$  atau  $\frac{\partial \phi^{(k)}}{\partial n}$ . Sedangkan, untuk indeks  $k = N + 1, N + 2, \dots, N + L$  variabel yang belum diketahui adalah  $\bar{\phi}^{(k)}$ .

Persamaan (29) dapat diubah menjadi bentuk berikut,

$$\sum_{k=1}^{N+L} a^{(nk)} z^{(k)} = - \sum_{j=1}^{N+L} \mu^{(nk)} g(\bar{x}^{(j)}, \bar{y}^{(j)}) + \sum_{k=1}^N b^{(nk)}, \text{ untuk } n=1, 2, \dots, N+L. \quad (31)$$

Koefisien  $a^{(nk)}$ ,  $b^{(nk)}$ , dan  $z^{(k)}$  untuk  $k = 1, 2, \dots, N$  adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} a^{(nk)} &= \begin{cases} -f_1^{(k)}(\bar{x}^{(n)}, \bar{y}^{(n)}), & \text{jika } \phi \text{ diketahui pada } C^{(k)}, \\ f_2^{(k)}(\bar{x}^{(n)}, \bar{y}^{(n)}) - \frac{1}{2} \delta^{(nk)} - \mu^{(nk)} k^2, & \text{jika } \frac{\partial \phi}{\partial n} \text{ diketahui pada } C^{(k)}, \end{cases} \\ b^{(nk)} &= \begin{cases} \bar{\phi}^{(k)} \left( -f_2^{(k)}(\bar{x}^{(n)}, \bar{y}^{(n)}) + \frac{1}{2} \delta^{(nk)} + \mu^{(nk)} k^2 \right), & \text{jika } \phi \text{ diketahui pada } C^{(k)}, \\ \bar{p}^{(k)} f_1^{(k)}(\bar{x}^{(n)}, \bar{y}^{(n)}), & \text{jika } \frac{\partial \phi}{\partial n} \text{ diketahui pada } C^{(k)}, \end{cases} \\ z^{(k)} &= \begin{cases} \bar{p}^{(k)}, & \text{jika } \phi \text{ diketahui pada } C^{(k)}, \\ \bar{\phi}^{(k)}, & \text{jika } \frac{\partial \phi}{\partial n} \text{ diketahui pada } C^{(k)}. \end{cases} \end{aligned}$$

Sedangkan untuk  $k = N + 1, N + 2, \dots, N + L$ , koefisien  $b^{(nk)}$ , dan  $z^{(k)}$  adalah sebagai berikut,

$$\begin{aligned} a^{(nk)} &= -\delta^{(nk)} - k^2 \mu^{(nk)} \\ z^{(k)} &= \bar{\phi}^{(k)}. \end{aligned}$$

Koefisien  $\delta^{(nk)}$  untuk  $k = 1, 2, \dots, N + L, n = 1, 2, \dots, N + L$  adalah,

$$\delta^{(nk)} = \begin{cases} 0, & \text{jika } n \neq k \\ 1, & \text{jika } n = k. \end{cases}$$

Dengan menyelesaikan SPL (31) dapat diperoleh nilai  $\bar{\phi}^{(k)}, k = 1, 2, \dots, N + L$ , dan  $\bar{p}^{(k)}, k = 1, 2, \dots, N$ . Selanjutnya menggunakan Persamaan (28) serta nilai  $\bar{\phi}^{(k)}$  dan  $\bar{p}^{(k)}$  yang telah diperoleh, dapat digunakan untuk mencari nilai  $\phi(a, b), (a, b) \in C \cup R$ , dengan rumus

$$\lambda(a, b)\phi(a, b) = \sum_{j=1}^{N+L} \mu^{(j)} \left[ g(\bar{x}^{(j)}, \bar{y}^{(j)}) - k^2 \bar{\phi}^{(j)} \right] + \sum_{k=1}^N \left[ \bar{\phi}^{(k)} f_2^{(k)}(a, b) - \bar{p}^{(k)} f_1^{(k)}(a, b) \right] \quad (32)$$

dengan,

$$\mu^{(j)} = \sum_{m=1}^{N+L} \omega(\bar{x}^{(j)}, \bar{y}^{(j)}; \bar{x}^{(m)}, \bar{y}^{(m)}) \Psi(a, b; \bar{x}^{(m)}, \bar{y}^{(m)})$$

$$\lambda(a, b) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{jika } (a, b) \text{ pada bagian } \textit{smooth} C \\ 1, & \text{jika } (a, b) \in R \end{cases}$$

$$f_1^{(k)}(a, b) = \frac{1}{4\pi} \int_{C^{(k)}} \ln\left((x-a)^2 + (y-b)^2\right) ds$$

$$f_2^{(k)}(a, b) = \frac{1}{4\pi} \int_{C^{(k)}} \frac{\partial}{\partial n} \left[ \ln\left((x-a)^2 + (y-b)^2\right) \right] ds.$$

Berdasarkan pembahasan pada sub bab ini secara garis besar prosedur penyelesaian Persamaan Helmholtz dengan syarat batas adalah sebagai berikut.

1. Menentukan *relasi reciprocal* antara solusi Persamaan Helmholtz yang akan dicari dengan solusi fundamental Persamaan Laplace dengan memanfaatkan *relasi reciprocal* Persamaan Poisson.
2. Bentuk persamaan integral batas Persamaan Helmholtz dengan memanfaatkan *relasi reciprocal* antara solusi Persamaan Helmholtz dengan solusi fundamental Persamaan Laplace dan modifikasi domain.
3. Karena persamaan integral batas Persamaan Helmholtz masih mengandung integral domain, dekati integral domain tersebut dengan kombinasi linear fungsi basis radial yang berpusat di titik-titik kolokasi.
4. Turunkan persamaan integral batas Persamaan Helmholtz yang berbentuk integral garis dari persamaan integral batas bentuk sebelumnya dan pendekatan integral domain.
5. Selesaikan persamaan integral batas Persamaan Helmholtz tersebut dengan mensubstitusikan titik-titik kolokasi, sehingga diperoleh sebuah SPL.
6. Selesaikan SPL tersebut. Selanjutnya dengan mensubstitusikan solusi SPL ke persamaan integral batas, dapat diperoleh suatu persamaan yang dapat digunakan untuk mengevaluasi Persamaan Helmholtz di setiap titik pada domainnya.

### Simulasi Numerik

Berikut diberikan contoh menyelesaikan suatu MSB Persamaan Helmholtz menggunakan DRBEM. Diberikan Masalah Syarat Batas (MSB) Persamaan Helmholtz termodifikasi

$$\frac{\partial^2 \phi(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi(x, y)}{\partial y^2} + \alpha(x, y)\phi(x, y) = g(x, y), \quad (33)$$

dengan  $\alpha(x, y) = \frac{\pi^2}{8} + y$ , dan  $g(x, y) = \frac{\pi^2}{8}xy + y \sin\left(\frac{\pi x}{4}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{4}\right) + xy^2$ ,

serta syarat batasnya

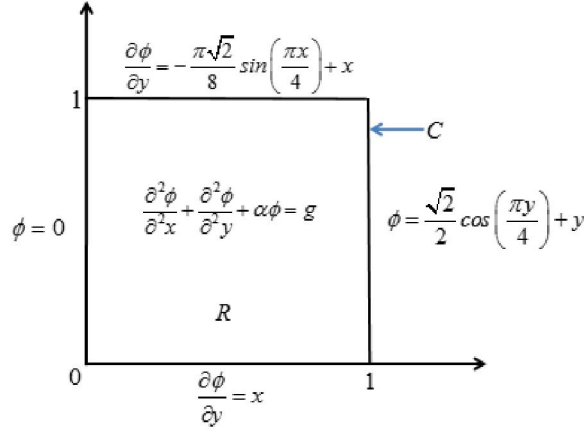
$$\phi(x, y) = 0, \text{ untuk } 0 < y < 1 \text{ dan } x=0,$$

$$\phi(x, y) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos\left(\frac{\pi y}{4}\right) + y, \text{ untuk } 0 < y < 1 \text{ dan } x=1,$$

$$\frac{\partial \phi(x, y)}{\partial y} = x, \text{ untuk } 0 < x < 1 \text{ dan } y=0,$$

$$\frac{\partial \phi(x, y)}{\partial y} = -\frac{\pi\sqrt{2}}{8} \sin\left(\frac{\pi x}{4}\right) + x, \text{ untuk } 0 < x < 1 \text{ dan } y=1.$$

Secara sistematis MSB tersebut dapat digambarkan sebagai berikut.



**Gambar 2.** Contoh MSB Persamaan Helmholtz

Menggunakan prosedur penyelesaian MSB dengan DRBEM yang telah diberikan sebelumnya, akan dicari solusi pendekatan di beberapa titik pada domainnya. Berikut prosedur penyelesaiannya.

1. *Relasi reciprocal*

*Relasi reciprocal* antara  $\Phi(x, y; \xi, \eta)$  solusi fundamental Persamaan Laplace yang diberikan oleh Persaman (4) dan  $\phi(x, y)$  solusi Persamaan Helmholtz (33) yang akan dicari pada domain  $R$  adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned} & \int_C \left( \Phi(x, y; \xi, \eta) \frac{\partial \phi(x, y)}{\partial n} - \phi(x, y) \frac{\partial \Phi(x, y; \xi, \eta)}{\partial n} \right) ds(x, y) \\ &= \iint_R \Phi(x, y; \xi, \eta) (g(x, y) - \alpha(x, y)\phi(x, y)) dx dy, \end{aligned} \quad (34)$$

dengan  $(\xi, \eta) \neq (x, y)$ .

2. Persamaan integral batas

Menggunakan *relasi reciprocal* (34) dan modifikasi domain diperoleh persamaan integral batas

$$\lambda(\xi, \eta)\phi(\xi, \eta) = \int_C \left( \phi(x, y) \frac{\partial \Phi(x, y; \xi, \eta)}{\partial n} - \Phi(x, y; \xi, \eta) \frac{\partial \phi(x, y)}{\partial n} \right) ds + \iint_R \Phi(x, y; \xi, \eta) (g(x, y) - \alpha(x, y)\phi(x, y)) dx dy, \quad (35)$$

$$\text{dengan } \lambda(\xi, \eta) = \begin{cases} 0, & \text{jika } (\xi, \eta) \notin R \cup C, \\ \frac{1}{2}, & \text{jika } (\xi, \eta) \text{ pada bagian } \textit{smooth} C, \\ 1, & \text{jika } (\xi, \eta) \in R. \end{cases}$$

3. Pendekatan integral domain

Menggunakan pendekatan fungsi basis radial, diperoleh pendekatan integral domain sebagai berikut.

$$\begin{aligned} & \iint_R \Phi(x, y; \xi, \eta) (g(x, y) - \alpha(x, y)\phi(x, y)) dx dy \\ &= \sum_{j=1}^M \left[ \sum_{m=1}^M \omega(a^{(j)}, b^{(j)}; a^{(m)}, b^{(m)}) \Psi(\xi, \eta; a^{(m)}, b^{(m)}) \right] \times \\ & \quad \left[ g(a^{(j)}, b^{(j)}) - \alpha(a^{(j)}, b^{(j)})\phi(a^{(j)}, b^{(j)}) \right]. \end{aligned} \quad (36)$$

4. Persamaan integral batas dalam bentuk integral garis.

Menggunakan persamaan integral batas dan pendekatan integral domain, diperoleh persamaan integral batas dalam bentuk integral garis Persamaan (33) sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \lambda(\xi, \eta)\phi(\xi, \eta) &= \sum_{j=1}^M \left[ \sum_{m=1}^M \omega(a^{(j)}, b^{(j)}; a^{(m)}, b^{(m)}) \Psi(\xi, \eta; a^{(m)}, b^{(m)}) \right] \times \\ & \quad \left[ g(a^{(j)}, b^{(j)}) - \alpha(a^{(j)}, b^{(j)})\phi(a^{(j)}, b^{(j)}) \right] \\ & \quad + \int_C \left( \phi(x, y) \frac{\partial \Phi(x, y; \xi, \eta)}{\partial n} - \Phi(x, y; \xi, \eta) \frac{\partial \phi(x, y)}{\partial n} \right) ds \end{aligned} \quad (37)$$

untuk  $(\xi, \eta) \in R \cup C$ .

5. Penyelesaian persamaan integral batas

Dengan mensubstitusikan titik-titik kolokasi ke persamaan integral batas diperoleh SPL

$$\begin{aligned} \lambda(\bar{x}^{(n)}, \bar{y}^{(n)})\phi(\bar{x}^{(n)}, \bar{y}^{(n)}) &= \sum_{j=1}^{N+L} \mu^{(nj)} \left[ g(\bar{x}^{(j)}, \bar{y}^{(j)}) - \alpha(\bar{x}^{(j)}, \bar{y}^{(j)})\phi(\bar{x}^{(j)}, \bar{y}^{(j)}) \right] \\ & \quad + \sum_{k=1}^N \left[ \phi^{(k)} f_2^{(k)}(\bar{x}^{(n)}, \bar{y}^{(n)}) - p^{(k)} f_1^{(k)}(\bar{x}^{(n)}, \bar{y}^{(n)}) \right] \text{ untuk } n = 1, 2, \dots, N + L. \end{aligned} \quad (38)$$

6. Persamaan untuk mengevaluasi solusi

Dengan mensubstitusikan solusi Persamaan (38) diperoleh persamaan untuk mengevaluasi solusi Persamaan (33) sebagai berikut.

$$\lambda(a,b)\phi(a,b) = \sum_{j=1}^{N+L} \mu^{(j)} \left[ g(\bar{x}^{(j)}, \bar{y}^{(j)}) - \alpha^{(j)} \bar{\phi}^{(j)} \right] + \sum_{k=1}^N \left[ \bar{\phi}^{(k)} f_2^{(k)}(a,b) - \bar{p}^{(k)} f_1^{(k)}(a,b) \right] \quad (39)$$

dengan  $(a,b) \in C \cup R$ .

Langkah-langkah metode DRBEM tersebut akan diimplementasikan dalam program Matlab. Implementasi Matlab dalam kasus ini dibagi menjadi tiga tahap, yaitu tahap Pre-processing, Processing, dan Post-processing. Setiap tahap memerlukan input dan menghasilkan output. Beberapa tahap juga memerlukan output tahap sebelumnya untuk dijadikan input pada tahap tersebut. Secara sistematis implementasi program Matlab dapat dilihat pada skema Gambar 3.

Selanjutnya implementasi program Matlab tersebut digunakan untuk menyelesaikan MSB Persamaan Helmholtz (33) dengan syarat batas campuran (36). Dievaluasi sembilan buah titik menggunakan titik kolokasi pada batas domain/segmen garis berjumlah 80 dan 49 titik kolokasi dalam domain. Nilai error diperoleh dengan mencari selisih hasil MEB dengan solusi eksaknya. Dapat ditunjukkan bahwa solusi eksak dari MSB Persamaan Helmholtz (33) dengan syarat batas campuran (36) adalah  $\phi = \sin\left(\frac{\pi x}{4}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{4}\right) + xy$ . Selanjutnya, akan dibuat surface plot dari MSB Persamaan Laplace pada domain  $R$  yang berbentuk persegi dengan mengevaluasi 100 buah titik pada domain  $R$ .

**Tabel 1.** Hasil simulasi numerik

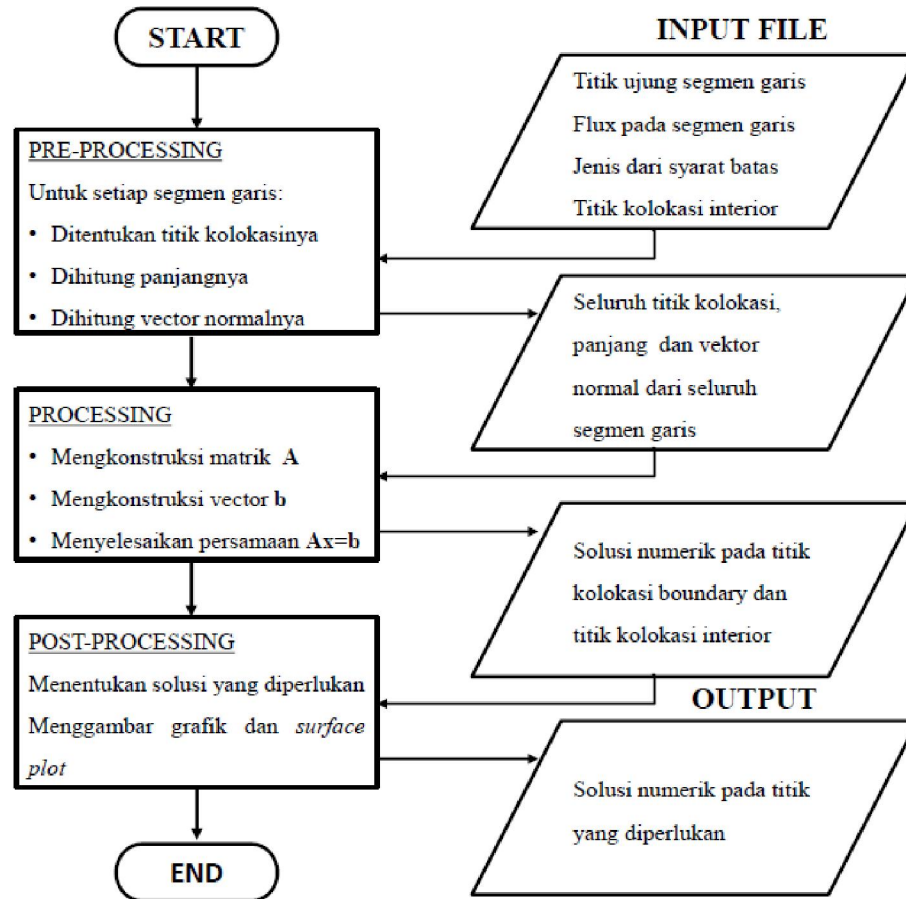
Titik	Numeric	Exact	Error
(0.25,0.25)	0.2495047259	0.2538417162	0.0043369903
(0.25,0.50)	0.2941793951	0.3052399555	0.0110605604
(0.25,0.75)	0.3107865265	0.3497116744	0.0389251479
(0.50,0.25)	0.5084048149	0.5003302775	0.0080745374
(0.50,0.50)	0.5992131894	0.6035533906	0.0043402012
(0.50,0.75)	0.6715201950	0.6931896451	0.0216694502
(0.75,0.25)	0.7529743069	0.7323951068	0.0205792001
(0.75,0.50)	0.8947260492	0.8882799672	0.0064460820
(0.75,0.75)	1.0353901801	1.0244397663	0.0109504138

Maksimal Error untuk beberapa titik tersebut adalah 0.0389251479

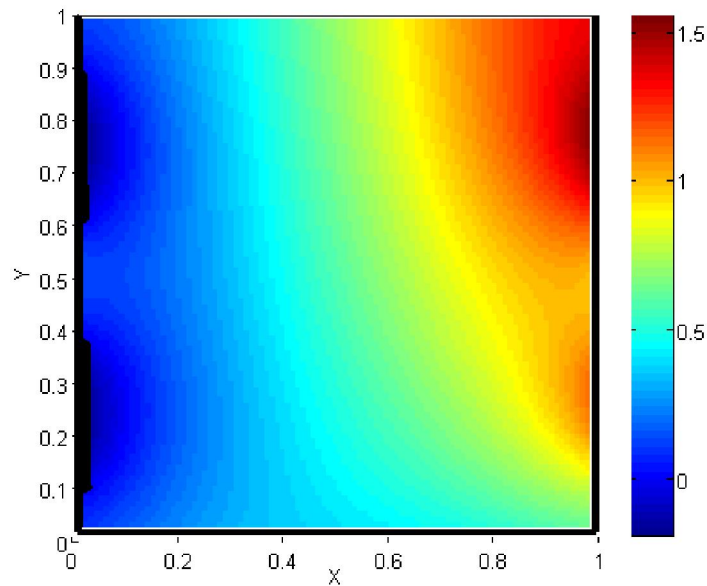
Berdasarkan simulasi numerik tersebut terlihat bahwa error yang dihasilkan cukup kecil yaitu yang paling besar 0.0389251479 pada saat digunakan 80 segmen garis dan 49 titik kolokasi pada interior domain. Hal ini mengindikasikan DRBEM cukup baik memberikan solusi numerik masalah MSB Persamaan Helmholtz.

Surface plot MSB Helmholtz Persamaan (33) dan syarat batas campuran Persamaan (46) pada domain  $R$  dapat dilihat pada Gambar 4. Warna pada suatu titik pada Gambar 4 mewakili nilai dari  $\phi$  di titik tersebut, berturut-turut degradasi warna dari biru sampai merah bernilai 0 sampai 1,5. Diperhatikan bahwa warna dari pojok kiri bawah sampai pojok kanan atas berwarna degradasi biru sampai merah, hal ini mengindikasikan solusi yang diperoleh dari hasil numerik mendekati solusi eksaks  $\phi = \sin\left(\frac{\pi x}{4}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{4}\right) + xy$ .





Gambar 3. Diagram Alur DRBEM dengan Matlab.



Gambar 4. Surface Plot

## KESIMPULAN

Berdasarkan pada pembahasan sebelumnya secara garis besar prosedur penyelesaian masalah syarat batas Persamaan Helmholtz menggunakan DRBEM adalah sebagai berikut.

1. Menentukan *relasi reciprocal* antara solusi Persamaan Helmholtz yang akan dicari dengan solusi fundamental Persamaan Laplace dengan memanfaatkan *relasi reciprocal* Persamaan Poisson.
2. Dibentuk persamaan integral batas Persamaan Helmholtz dengan memanfaatkan *relasi reciprocal* antara solusi Persamaan Helmholtz dengan solusi fundamental Persamaan Laplace dan modifikasi domain.
3. Karena persamaan integral batas Persamaan Helmholtz masih mengandung integral domain, dekati integral domain tersebut dengan kombinasi linear fungsi basis radial yang berpusat di titik-titik kolokasi.
4. Turunkan persamaan integral batas Persamaan Helmholtz yang berbentuk integral garis dari persamaan integral batas bentuk sebelumnya dan pendekatan integral domain.
5. Selesaikan persamaan integral batas Persamaan Helmholtz tersebut dengan mensubstitusikan titik-titik kolokasi, sehingga diperoleh sebuah SPL.
6. Selesaikan SPL tersebut. Selanjutnya dengan mensubstitusikan solusi SPL ke persamaan integral batas, dapat diperoleh suatu persamaan yang dapat digunakan untuk mengevaluasi Persamaan Helmholtz di setiap titik pada domainnya.

Hasil numerik yang diperoleh dengan menggunakan DRBEM ini mengindikasikan bahwa DRBEM ini dapat menghasilkan solusi numerik yang cukup akurat dalam menyelesaikan MSB Persamaan Helmholtz.

## REFERENSI

- [1] Ang, W.T., 2007, *A Beginners Course in Boundary Element Methods*, Universal Publishers, Florida.
- [2] Humi, M. dan Miller, W. B., 1992, *Boundary Value Problems and Partial Differential Equation*, PWS-KENT, Boston.
- [3] Katsikadelis, J. T., 2001, *Boundary Element: Theory and Applications*, Elsevier Science, Oxford.
- [4] Lobo, M., 2008, *Dual Reciprocity Boundary Element Methods for the Solution of a Class of Ifiltration Problems*, Faculty of Engineering, Coputer and Mathematical Sciences, University of Adelaide, Doctor Disertation.
- [5] Manaqib, M., 2015, *Dual Reciprocity Boundary Element Methods untuk Menyelesaikan Masalah Infiltrasi Saluran Irigasi Alur di dalam Beberapa Jenis Tanah Homogen*, Universitas Gadjah Mada, Master Tesis.
- [6] Pozrikidis, C., 2002, *A Practical Guide to Boundary Element Methods with The Software Library BEMLIB*, Chapman & Hall/CRR, Florida.
- [7] Solekhuudin, I. dan Ang, K.C., 2012, Suction Potential and Water Absorption from Periodic Chanel in Different Types of Homogeneous Soil, *Electronic Jurnal of Boundary Element*, 10(2), pp. 42-55, Wiley-Blackwell.
- [8] Solekhuudin, I., 2013, *Dual Reciprocity Boundary Element Methods for Water Ifiltration Problems in Irrigation*, National Institute of Education, Nangyang Technological University, Doctor Dissertation.