Jurnal "LOG!K@" , Jilid 8, No. 1, 2018, Hal. 50 - 59
ISSN 1978 – 8568

DIAMETER DAN GIRTH GRAF TORSI ATAS MODUL

Nadya Asanul Husna, Nur Inayah, dan **Budi Harianto**
Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Syarif Hidayatullah Jakarta

Abstract: For a commutative ring with set of zero divisors $Z\ (R)$, the zero divisors graph of R is $\Gamma_R(R) = Z\ (R) = Z(R) - \{0\}$, with distinct x and y adjacent if and only if $xy = 0$. Torsion graph $\Gamma_R(M)$ of M is a simple graph whose vertices are non-zero torsion elements of $T(M)^*$ and two different elements x and y are adjacent if and only if $Ann(x) \cap Ann(y) \neq 0$. In this paper, we investigate the relationship between the diameters and girth of $\Gamma_R(R)$ and $\Gamma_R(M)$. Also we study properties of torsion graph.
Keywords: diameter, girth, zero divisor graphs, torsion graphs.

Abstrak: Untuk gelanggang komutatif R dengan himpunan pembagi nol $Z(R)$, graf pembagi nol dari R adalah $\Gamma_R(R) = Z\ (R) = Z(R) - \{0\}$, dimana x dan y adalah dua titik berbeda bertetangga jika dan hanya jika $xy = 0$. Graf torsi $\Gamma_R(M)$ pada M adalah graf sederhana, dengan simpul-simpulnya adalah elemen tak nol dari suatu elemen torsi $T(M)^*$ dan dua elemen berbeda x dan y dikatakan bertetangga jika dan hanya jika $Ann(x) \cap Ann(y) \neq 0$. Pada skripsi ini, kita akan tunjukkan hubungan antara diameter dan girth $\Gamma_R(R)$ dengan $\Gamma_R(M)$. Kita juga membahas beberapa sifat graf torsi atas modul.
Kata kunci: diameter, girth, graf pembagi nol, graf torsi.

PENDAHULUAN

Gagasan menghubungkan sebuah graf dengan gelanggang komutatif p embagi nol telah dikenalkan oleh I. Beck pada tahun 1988 [4]. Anderson dan Livingston pada tahun 1999 memperkenalkan dan meneliti graf p embagi nol dari gelanggang komutatif R,yang dilambangkan dengan $\Gamma(R)$ dengan elemen satuan yang simpul-simpulnya adalah pembagi nol tak nol dari R [1]. Graf $\Gamma(R)$ adalah graf sederhana dengan simpul-simpulnya $Z(R)^* = Z(R) - \{0\}$, himpunan pembagi nol tak nol dari gelanggang, dan untuk dua elemen berbeda $x, y \in Z(R)^*$ bertetangga jika dan hanya jika $xy = 0$. Pada tahun 2011 konsep graf pembagi nol dari gelanggang diperluas ke teori modul oleh Ghalandarzadeh dan Malakooti Rad [15]. Mereka mendefinisikan graf torsi dari $R - modul$, yang disimbolkan dengan $\Gamma_R(M)$, adalah graf sederhana yang simpul-simpulnya adalah elemen torsi tak nol dari M sedemikian sehingga dua simpul yang berbeda x, y bertetangga jika dan hanya jika $[x : M][y : M]M = 0$. Kemudian $\Gamma_R(M)$ merupakan graf kosong jika dan hanya jika M adalah $R - modul$ bebas torsi. Berdasarkan banyaknya penelitian mengenai konsep teori graf yang dikaitkan dengan teori aljabar maka pada skripsi ini, penulis tertarik untuk meneliti tentang diameter dan girth graf torsi atas modul $\Gamma_R(M)$.

TINJAUAN PUSTAKA

Gelanggang Komutatif

Definisi 1 (Gelanggang) Himpunan tak kosong R dikatakan gelanggang jika di R terdapat dua operasi, yaitu penjumlahan (”+”) dan perkalian (” · ”) sedemikian sehingga untuk setiap a, b, c ∈ R berlaku [10]:

1. $a + b \in R$
2. $a + b = b + a$
3. $(a + b) + c = a + (b + c)$
4. Terdapat $0 \in R$ sedemikian sehingga $a + 0 = a$
5. Terdapat $-a \in R$ sedemikian sehingga $a + (-a) = 0$
6. $a \cdot b \in R$
7. $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
8. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ dan $(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$

Jika terdapat unsur 1 ∈ R sedemikain sehingga $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$, maka dapat dikatakan R sebagai gelanggang dengan elemen satuan. Gelanggang R dikatakan gelanggang komutatif jika operasi perkalian pada R bersifat komutatif.

Definisi 2 (Ideal) Diketahui gelanggang R dengan elemen satuan dan $I \subseteq R$. Himpunan I disebut ideal di R jika dan hanya jika himpunan I memenuhi ketiga sifat berikut [12]:

1. $I \neq \emptyset$
2. Untuk setiap $,b \in I$, maka $a + b \in I$
3. $a \in I$ dan setiap $r \in R$, maka $ar \in I$

Definisi 3 (Modul atas Gelanggang) Misalkan R adalah gelanggang. M dikatakan modul atas gelanggang jika M merupakan himpunan tak kosong dengan dua operasi. Operasi pertama disebut penjumlahan dengan lambing (” + ”), M merupakan grup abel dan mengaitkan $(m_1, m_2) \in M \times M$, ke $m_1 + m_2 \in M$. Operasi kedua disebut perkalian skalar, yang mengaitkan $(r, m) \in R \times M$, ke $rm \in M$, sehingga berlaku [10]:

1. $r(a + b) = ra + rb$
2. $r(sa) = (rs)a$
3. $(r + s)a = ra + sa$

Jika terdapat unsur $1 \in R$ sedemikian sehingga $1m = m$, untuk setiap $m \in M$ maka M dapat dikatakan sebagai $R - modul\, M$ dengan elemen satuan.

Definisi 4 (Submodul) Diberikan M adalah $R - modul$ dan $N \subseteq M$. Himpunan N disebut submodul jika memenuhi[12]:

1. 0 ∈ N
2. Misalkan $n, n' \in N$ maka $n + n' \in N$
3. Misalkan $n \in N$ dan $r \in R$ maka $rn = nr \in N$

Definisi 5 (Modul Multiplikasi) Diberikan M adalah $R - modul$ dikatakan modul multiplikasi jika dan hanya jika untuk setiap submodul N di M terdapat ideal I di gelanggang R sehingga berlaku $N = I M$ [5].

Definisi 6 Diberikan M adalah $R-modul$. $Ann(M)$ dikatakan himpunan annihilator dari M jika [12]

$$Ann(M) = \{r \in R|rm = 0, \forall m \in M\}$$

untuk suatu $x \in M$, $Ann(x) = \{r \in R|rx = 0\}$ [12].

Definisi 7 (Modul Setia) Diberikan M adalah $R-modul$. M dikatakan modul setia jika $Ann(M) = \{0\}$ [12].

Definisi 8 (Elemen Torsi) Diberikan R gelanggang komutatif dan M adalah $R-modul$. $T(M)$ dikatakan himpunan elemen torsi jika [12]

$$T(M) = \{m \in M|\exists 0 \neq r \in R, rm = 0\}.$$

Definisi 9 (Modul Bebas Torsi) Diberikan M adalah $R-modul$. Modul M dikatakan modul bebas torsi jika satu-satunya elemen torsi di M adalah 0 dengan kata lain $T(M) = 0$ [12].

Definisi 10 (Modul Torsi) Diberikan M adalah $R-modul$. Modul M dikatakan modul torsi jika semua elemen $m \in M$ adalah elemen torsi dengan kata lain $T(M) = M$ [12].

Definisi 11 (Graf) Graf G terdiri dari himpunan tak kosong berhingga $V(G)$ dari objek yang disebut titik dan sebuah himpunan sisi yang mungkin kosong $E(G)$ dari dua anggota subset dari $V(G)$ yang disebut dengan sisi. Himpunan $V(G)$ disebut himpunan titik di G dan himpunan $E(G)$ disebut himpunan sisi di G [6].

Definisi 12 (Graf Terhubung) Misalkan u dan v adalah titik-titik didalam sebuah graf. Kita katakan u terhubung ke v jika graf G mengandung sebuah lintasan $u - v$. Graf G itu sendiri terhubung jika u terhubung ke v untuk setiap pasangan u, v dari titik-titik di graf G. Sebuah graf G tidak terhubung disebut disconnected [6].

Definisi 13 (Ketetanggaan) Misalkan G sebuah graf dan $\{u, v\}$ sebuah sisi di G. Karena $\{u, v\}$ terdiri dari 2 anggota himpunan titik, maka dapat ditulis $\{u, v\}$ atau $\{v, u\}$. Umumnya sisi tersebut direpresentasikan dengan uv atau vu. Jika $e = uv$ adalah sisi di graf G, maka dapat dikatakan bahwa u dan v adalah bertetangga di G, u dan v juga dapat bertetangga dengan lainnya [6].

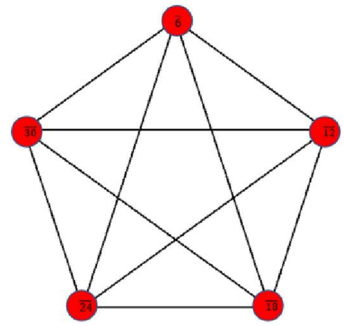
Definisi 14 (Graf Lengkap) Graf lengkap merupakan graf yang untuk setiap simpul saling bertetangga [6].

HASIL DAN PEMBAHASAN

Sifat Graf Torsi

Definisi 15 (Graf Torsi pada Modul) Sebuah graf torsi, $\Gamma_R(M)$ adalah graf sederhana dengan simpul-simpulnya adalah elemen tak nol dari suatu elemen torsi M dan dua elemen berbeda x dan y dikatakan bertetangga jika dan hanya jika dan hanya jika $Ann(x) \cap Ann(y) \neq \{0\}$.

Contoh 16 Misalkan $M = Z_{36}$ dan $R = Z_{36}$. $\Gamma_{Z_{36}}(Z_{36})$ adalah graf torsi (Gambar 1).



Gambar 1. $(Z_{36})Z_{36}$

Lemma 17 Misalkan R adalah daerah integral, maka $\Gamma_R(M)$ adalah graf lengkap.

Bukti.
Misalkan R adalah daerah integral dan misalkan M adalah $R - modul$. Akan dibuktikan graf torsi $\Gamma_R(M)$ adalah graf lengkap.
Misalkan $x, y \in T(M)^*$ maka untuk $x \in M$ terdapat $0 \neq r \in R$ memenuhi $rx = 0$ dan untuk $y \in M$ terdapat $0 \neq s \in R$ memenuhi $sy = 0$.
Ambil sebarang $r \in Ann(x)$ dan $s \in Ann(y)$.
Karena R adalah daerah integral dan $0 \neq r, s \in R$ tertutup terhadap multiplikasi maka $0 \neq rs \in R$.
Perhatikan:

1. untuk $rs \in R$ maka
$$(rs)(x) = (sr)(x) = (s)(rx) = (s)(0) = 0,$$

2. untuk $rs \in R$ maka
$$(rs)(y) = (r)(sy) = (r)(0) = 0.$$

Berdasarkan 1 dan 2 terbukti bahwa $rs \in Ann(x)$ dan $rs \in Ann(y)$ sehingga dapat dikatakan $rs \in Ann(x) \cap Ann(y)$.
Sekarang akan ditunjukkan $Ann(x) \cap Ann(y) \neq 0$. Karena $rs \neq 0$ dan $rs \in Ann(x) \cap Ann(y)$ maka $0 \neq rs \in Ann(x) \cap Ann(y)$
akibatnya x dan y bertetangga, dan $d(x, y) = 1$. Terbukti bahwa graf torsi $\Gamma_R(M)$ adalah graf lengkap. ■

Contoh 18 Diberikan Modul $M = Z_9$ dan $R = Z_7$. $\Gamma_R(M)$ adalah graf lengkap (Gambar 2).

Gambar 2. $(Z_9)Z_7$

Teorema 19 Jika M adalah $R - modul$ dengan $Ann(x) = Ann([x : M]M)$ untuk semua $s \in T(M)^*$. $\Gamma_R(M)$ berhingga jika dan hanya jika M berhingga atau M adalah $R - modul$ bebas torsi.

Bukti.
$\Rightarrow$ Misalkan $\Gamma_R\,(M)$ berhingga dan tak kosong, artinya terdapat $x \in T\,(M)^*$, yaitu $x \in M$ maka terdapat $0 \neq r \in R$ memenuhi $rx = 0$.
Misalkan $N = [x : M]\,M$ dan $0 \neq s \in [x : M]$. Karena $N = [x : M]\,M$ maka berdasarkan definisi annihilator memenuhi $rn = 0$ untuk setiap $n \in N$ sehingga $Ann\,(x) \subseteq Ann\,(n)$. Oleh karena itu $N \subseteq T\,(M)^*$ dan N berhingga. Akan dibuktikan M berhingga. Andaikan M tak berhingga maka terdapat $n \in N$ dan didefinisikan $H = \{m \in M \mid sm = n\}$ dan H tak berhingga.
Ambil sebarang m_1 dan m_2 yang berbeda dan $m_1, m_2 \in H$ maka $sm_1 = n$ dan $sm_2 = n$.
Perhatikan:

$$sm_1 - sm_2 = s(m_1 - m_2) = 0$$

maka $(m_1 - m_2) \in T(M)^*$ berhingga. Hal ini kontradiksi, maka haruslah M berhingga.
$\Leftarrow$ Misalkan M adalah $R - modul$ dan M berhingga.
Akan dibuktikan graf torsi $\Gamma_R(M)$ adalah graf berhingga. Karena M berhingga maka himpunan titik $V(\Gamma_R(M))$ juga berhingga dan $V(\Gamma_R(M)) \subseteq M$. Karena $V(\Gamma_R(M))$ adalah himpunan titik pada graf torsi $\Gamma_R(M)$ maka graf torsi $\Gamma_R(M)$ adalah graf berhingga. ■

Hubungan Diameter Graf Torsi dengan Graf Pembagi Nol
Teorema 20 Diberikan M adalah $R - modul$ maka $\Gamma_R(M)$ terhubung dengan $diam\big(\Gamma_R(M)\big) \leq 3$ jika salah satu memenuhi:
1. $\Gamma_R(R)$ adalah graf lengkap,
2. R adalah von Neumann reguler dan $R \ncong Ann(x) \oplus Ann(y), x, y \in T(M)^*$,
3. $Nil\,(R) \neq 0$.

Bukti
Misalkan $x, y \in T(M)^*$ dan x, y adalah elemen yang berbeda, maka terdapat $0 \neq s \in Ann(x)$ dan $0 \neq Ann(t)$ memenuhi $sx = 0$ dan $ty = 0$.
Jika $Ann\,(x) \cap Ann\,(y) \neq 0$ atau $Ann\,(M) \neq 0$ maka $x - y$ adalah lintasan dengan jarak $d\,(x,y) = 1$. Jika M adalah modul setia dan $Ann\,(x) \cap Ann\,(y) = 0$. Sehingga terdapat dua elemen tak nol $s, t \in R$ sedemikian sehingga $sx = ty = 0$ tapi $sy \neq 0$ dan $tx \neq 0$.
Akan dibuktikan graf torsi terhubung dengan $diam\big(\Gamma_R(M)\big) \leq 3$. Jika salah satu memenuhi:

1. Misalkan graf pembagi nol $\Gamma_R\,(R)$ adalah graf lengkap. Akibatnya, $Ann\,(s) \cap Ann\,(t) \neq 0$. Misalkan $Ann\,(x) \cap Ann\,(tx) \neq 0$ dan $Ann\,(y) \cap Ann\,(sy) \neq 0$. Jika $tx = sy$ dan $Ann\,(tx) \cap Ann\,(sy) \neq 0$ maka
$$x - tx - y$$
adalah lintasan dengan jarak $d(x,y) = 2$.
Jika $tx \neq sy$ dan $Ann\,(tx) \cap Ann\,(sy) \neq 0$ maka
$$x - tx - sy - y$$
adalah lintasan dengan jarak d(x, y) = 3.
Akibatnya graf torsi terhubung dengan diameter diam (x, y) $\leq$ 3. Jadi graf torsi $\Gamma_R(M)$ terhubung dengan diam (x, y) $\leq$ 3.
2. Misalkan gelanggang R adalah gelanggang von neuman reguler.
Misalkan $R \ncong Ann(x) \oplus Ann(y)$, untuk setiap $x, y \in T(M)^*$
Karena $s, t \in R$ dan R adalah gelanggang von Neuman reguler maka kita tahu bahwa $s = u_1 e_1$ dan $t = u_2 e_2$ untuk u_1, u_2 adalah elemen satuan dan e_1, e_2

adalah elemen idempoten. Karena e_1, e_2 adalah elemen idempotent maka $1-e_1$ dan $1-e_2$ adalah elemen idempotent. Akibatnya, $(1-e_1)(1-e_2) \in Ann(s) \cap Ann(t)$.

Misalkan $Ann(s) \cap Ann(t) = 0$. Karena $s, t \in R$ dan R adalah gelanggang von Neuman reguler maka setiap ideal R yang dibangun terbatas adalah ideal principal dibangun oleh idempoten, akibatnya, $1 \in Rs + Rt \subseteq Ann\,(x) \cap Ann\,(y)$. Oleh sebab itu, $R \cong Ann(x) \cap Ann(y)$. Hal in kontradiksi dengan pernyataan $R \ncong Ann(x) \oplus Ann(y)$. Akibatnya $Ann(s) \cap Ann(t) \neq 0$.

Misalkan $Ann(tx) \cap Ann(sy) \neq 0$ maka

$$x - tx - sy - y$$

adalah lintasan dengan jarak $d(x,y) = 3$.

Akibatnya graf torsi terhubung dengan diameter diam (x, y) ≤ 3.

Jadi graf torsi $\Gamma_R(M)$ terhubung dengan diam (x, y) ≤ 3.

3. Misalkan $0 \neq a \in N\,il\,(R)$ maka $a^n = 0$ dan $a^{n-1} \neq 0$, untuk $n \in N$. Misalkan $x, y \in V\,(\Gamma_R(M))$ dan $Ann(x) \cap Ann(y) \neq 0$ sehingga $d\,(x,y) = 1$, maka

$$x - y$$

adalah lintasan dengan jarak $d(x,y) = 1$.

Misalkan $x, y \in V(\Gamma_R(M))$ dan $Ann(x) \cap Ann(y) = 0$ sehingga $d(x,y) \neq 1$, maka x dan y tidak terhubung oleh suatu sisi. Lalu kita menyelidiki apakah ada simpul lain yang dilalui lintasan $x - y$, akan muncul beberapa kasus.

(a) Misalkan $ax = 0$ dan $ay = 0$ maka

$$x - a - y$$

adalah lintasan dengan jarak $d(x,y) = 2$.

(b) Jika $ax \neq 0$ dan $ay = 0$ maka $0 \neq a^{n-1} \in Ann(x) \cap Ann(y)$

$$x - ax - y$$

adalah lintasan dengan jarak $d(x,y) = 2$.

(c) Jika $ax = 0$ dan $ay \neq 0$ maka $0 \neq a^{n-1} \in Ann(x) \cap Ann(y)$

$$x - ay - y$$

adalah lintasan dengan jarak $d(x,y) = 2$.

(d) Jika $ax \neq 0$ dan $ay \neq 0$ maka

$$x - ax - ay - y$$

adalah lintasan dengan jarak $d(x,y) = 3$.

Jadi graf torsi $\Gamma_R(M)$ terhubung dengan diam (x, y) ≤ 3.■

Teorema 21 Jika M adalah $R - modul$ multiplikasi dengan $T\,(M\,) \neq M$ maka memenuhi:

1. Graf Torsi $\Gamma R\,(M\,)$ adalah graf lengkap jika dan hanya jika $\Gamma R\,(R)$ adalah graf lengkap.
2. Jika gelanggang R adalah Gelanggang Bėzout maka $diam\,(\Gamma_R(R)) = diam\,(\Gamma_R(M))$

Bukti

Misalkan M adalah R-modul multiplikasi dan $T\,(M) \neq M$.

1. ⇒ Misalkan graf torsi $\Gamma R\,(M\,)$ adalah graf lengkap dan $Ann\,(m) \neq 0$ untuk $m \in M$.
   Ambil sebarang $\alpha, \beta \in V\left(\Gamma_R(R)\right)$ dan $m \in M$

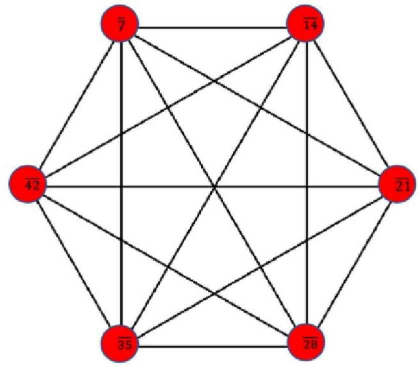
Misalkan $\alpha m, \beta m \in T(M)^*$
Akan dibuktikan $\Gamma_R(R)$ adalah graf lengkap.
Karena $\Gamma_R(M)$ adalah graf lengkap maka $Ann\,(\alpha m) \cap Ann(\beta m) \neq 0$.
Akibatnya, $r\,(\alpha m) = 0$ dan $r\,(\beta m) = 0$ untuk $0 \neq r \in R$.
Karena $r\alpha = r\beta = 0$ maka $d\,(\alpha, \beta) = 1$, akibatnya $\Gamma_R(R)$ adalah graf lengkap.

$\Leftarrow$ Misalkan graf pembagi nol $\Gamma_R(R)$ adalah graf lengkap. Misalkan $x, y \in T(M)^*$
Akan dibuktikan graf torsi $\Gamma_R(M)$ adalah graf lengkap.
Ambil sebarang $x, y \in T(M)^*$ maka $Ann\,(x) \neq 0$ dan $Ann\,(y) \neq 0$.
Karena $\exists 0 \neq r, s \in R$ memenuhi $rx \in 0$ dan $sy = 0$. Akibatnya $r[x:M] = 0 = s[y:M]$. Untuk $\alpha \in [x:M]$ dan $\beta \in [y:M]$, kita mempunyi $r\alpha = 0 = s\beta$ dan $\alpha, \beta \in V(\Gamma_R(R))$.
Akibatnya, $t \in Ann(x) \cap Ann(y)$ maka $d(x, y) = 1$. Oleh karena itu, graf torsi $\Gamma_R(M)$ adalah graf lengkap.

2. Misalkan gelanggang R adalah gelanggang $b\dot{e}zout$ dan modul M adalah modul multiplikasi. Berdasarkan (1), $diam\,(\Gamma_R(M)) = 1$ jika dan hanya jika $diam\,(\Gamma_R(R)) = 1$. Andaikan $diam(\Gamma_R(R)) = 2$ dan $x, y \in T(M)^*$ sehingga $d(x, y) \neq 1$. Misalkan $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i m_i$ dan $y = \sum_{j=1}^{n} \beta_j m_j$, untuk $0 \neq \alpha_i \in [x:M]$ dan $0 \neq \beta_j \in [y:M]$. Karena gelanggang R adalah gelanggang $b\dot{e}zout$ maka misalkan $\sum_{i=1}^{n} R\alpha_i = R\alpha$ dan $\sum_{j=1}^{n} R\beta_j = R\beta$, untuk $\alpha, \beta \in R$. Akibatnya, terdapat $m, m_0 \in M$ sehingga $x = \alpha m$ dan $y = \beta m_0$, jadi $\alpha, \beta \in Z(R)^*$. Jika $d(\alpha, \beta) = 1$ maka $d(x, y) = 1$, hal ini kontradiksi. Akibatnya, jika $d(\alpha, \beta) = 2$, maka terdapat $\gamma \in Z(R)^*$ sehingga
$$\alpha - \gamma - \beta$$
adalah lintasan dengan jarak $d(\alpha, \beta) = 2$, dan terdapat $0 \neq r, s \in R$ sehingga
$$r \in Ann\,(\alpha) \cap Ann\,(\gamma), s \in Ann\,(\gamma) \cap Ann\,(\beta)$$
Karena $M \neq T\,(M)$, maka terdapat $n \in M$ sehingga $\gamma n \in T(M)^*$. Akibatnya,
$$r \in Ann\,(\alpha) \cap Ann\,(\gamma n), s \in Ann\,(\gamma n) \cap Ann\,(\beta)$$
dan $\alpha m = x - \gamma n - y = \beta m$ adalah lintasan dengan panjang 2, maka $d\,(x, y) = 2$ dan $diam\,(\Gamma_R(M)) = 2$. Andaikan $diam\,(\Gamma_R(M)) = 2$ dan $\alpha, \beta \in Z(R)^*$ sehingga $d\,(\alpha, \beta) \neq 1$. Karena $M \neq T\,(M)$ maka terdapat $n \in M$ sehingga $\alpha n \neq 0$ dan $\beta n \neq 0$. Akibatnya $\beta n \neq \alpha n \in T(M)^*$. Akan di cek $d\,(\alpha n, \beta n) \neq 1$, maka $d\,(\alpha n, \beta n) = 2$ dan terdapat $z = \gamma m \in T(M)^*$ sehingga
$$\alpha n - \gamma m - \beta n$$
adalah lintasan dengan panjang 2.
Oleh karena itu, $r\alpha n = 0 = rz$ untuk $0 \neq r \in R$. Misalkan $r\gamma \in r\,[z : M\,] = 0$, sehingga
$$\alpha - \gamma - \beta$$
adalah lintasan dengan panjang 2 dan $d\,(\alpha, \beta) = 2$. Oleh sebab itu, $diam\,(\Gamma_R(R)) = 2$.
Ilustrasi diatas serupa dengan $diam\,(\Gamma_R(R)) = n$ jika dan hanya jika $diam\big(\Gamma_R(M)\big) = n$. Akibatnya $diam\big(\Gamma_R(R)\big) = diam\big(\Gamma_R(M)\big)$.

Berdasarkan (1) dan (2) terbukti bahwa jika graf torsi $\Gamma_R(M)$ adalah graf lengkap jika dan hanya jika $\Gamma_R(R)$ adalah graf lengkap dan jika gelanggang R adalah Gelanggang $B\dot{e}zout$ maka $diam\,(\Gamma_R(R)) = diam\,(\Gamma_R(M))$. ■

Contoh 22 Diberikan Modul $M = Z_{49}$ dan $R = Z_{49}$. $\Gamma_R(M)$ terhubung dengan $diam(\Gamma_R(M)) \leq 3$ (Gambar 3).



Gambar 3. $(Z_{49})Z_{49}$

Hubungan Girth Graf Torsi dengan Graf Pembagi Nol

Teorema 23 Misalkan M adalah $R-modul$. Jika $\Gamma_R(M)$ memiliki sikel, maka $gr(\Gamma_R(M)) = 3$.

Bukti

Misalkan $x, y, z, w \in T(M)^*$ dan $x - y - z - w - x$ adalah sikel terpendek dari graf torsi $\Gamma_R(M)$. Karena graf torsi $\Gamma_R(M)$ memiliki sikel maka terdapat $0 \neq r, s \in R$ sehingga $r \in Ann(x) \cap Ann(y)$ dan $s \in Ann(y) \cap Ann(z)$. Artinya untuk $r \in R$ memenuhi $rx = 0$ dan $ry = 0$, untuk $s \in R$ memenuhi $sy = 0$ dan $sz = 0$

Misalkan $x + y = 0$

Perhatikan:

$$x + y = 0$$
$$s(x + y) = (s)(0)$$
$$(sx + sy) = 0$$
$$(sx + sy) + (sz - sz) = 0$$
$$(sx + sz) + (sy - sz) = 0$$
$$(sx + sz) + 0 = 0$$
$$(sx + sz) = 0$$

Akibatnya $s \in Ann(x) \cap Ann(z)$. Karena $s \in Ann(x) \cap Ann(z)$, maka x dan z saling bertetangga. Sehingga terdapat sikel terpendek yaitu,

$$x - y - z - x$$

hal ini kontradiksi dengan pernyataan $x - y - z - w - x$ adalah sikel terpendek dari graf torsi $\Gamma_R(M)$.

Misalkan $x + y \neq 0$ maka $x + y \in T(M)^*$. Karena $rx = 0$ dan $ry = 0$ maka

$$rx + ry = 0$$
$$r(x + y) = 0$$

akibatnya $0 \neq r \in Ann(x + y)$. Karena $sx = 0$ dan $sy = 0$ maka

$$sx + sy = 0$$
$$s(x + y) = 0$$

akibatnya $0 \neq s \in Ann(x + y)$. Sehingga $r \in Ann(x) \cap Ann(x + y)$ dan $s \in Ann(x + y) \cap Ann(y)$ dan graf torsi $\Gamma_R(M)$ memiliki sikel yaitu

$$x - x + y - y - x$$

maka haruslah girth $gr\,(\Gamma_R\ (M\,)) = 3.$ ■

Teorema 24 Misalkan M adalah $R - modul$ multiplikasi setia, maka $gr\,(\Gamma_R\ (M\,)) = gr\,(\Gamma_R\ (R))$.

Bukti

Misalkan M adalah $R - modul$ multiplikasi setia. Misalkan $\Gamma_R\ (M)$ memiliki sikel maka berdasarkan teorema (23), jika graf torsi $\Gamma_R\ (M)$ memiliki sikel maka $gr\big(\Gamma_R(M)\big) = 3$.
Ambil sebarang $x, y, z \in T(M)^*$
Karena $x, y, z \in T(M)^*$ dan $\Gamma_R\ (M)$ memiliki sikel maka $r \in Ann\,(x) \cap Ann\,(y)$, $s \in Ann\,(y) \cap Ann\,(z)$, dan $t \in Ann\,(z) \cap Ann\,(x)$, untuk $0 \neq r, s, t \in R$ sehingga $x - y - z - x$ adalah sikel graf torsi $\Gamma_R\,(M)$. Oleh karena itu, untuk setiap $\alpha \in [x : M\,]$, $\beta \in [y : M\,]$, dan $\gamma \in [z : M\,]$, diperoleh $r \in Ann\,(\alpha) \cap Ann\,(\beta)$, $s \in Ann\,(\beta) \cap Ann\,(\gamma)$, dan $t \in Ann\,(\gamma) \cap Ann\,(\alpha)$, untuk $0 \neq r, s, t \in R$ sehingga

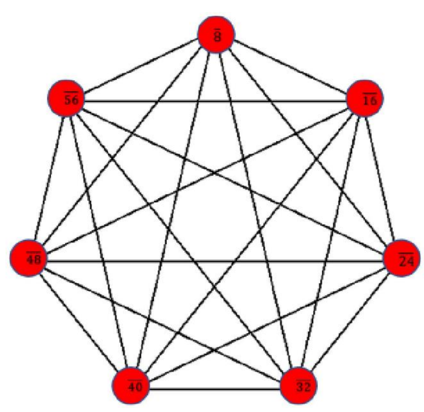
$$\alpha - \beta - \gamma - \alpha$$

adalah sikel graf pembagi nol $\Gamma_R\ (R)$.
Karena Madalah modul setia maka $\Gamma_R(M)$ terhubung, akibatnya terdapat $0 \neq m_1, m_2, m_3$ sehingga $\alpha m_1, \beta m_2, \gamma m_3 \in T(M)^*$, diperoleh $r \in Ann(\alpha m_1) \cap Ann(\beta m_2)$, $s \in Ann(\beta m_2) \cap Ann(\gamma m_3)$, dan $t \in Ann(\gamma m_3) \cap Ann(\alpha m_1)$, untuk $0 \neq r, s, t \in R$ sehingga

$$\alpha m_1 - \beta m_2 - \gamma m_3 - \alpha m_1$$

adalah sikel graf torsi $\Gamma_R(M)$ dan memiliki $gr(\Gamma_R(M)\,) = 3$.
Karena sikel terpendek graf torsi $\Gamma_R(M)$ dan graf pembagi nol $\Gamma_R(R)$ adalah 3, maka $gr(\Gamma_R(M)) = gr(\Gamma_R(M))$.
Oleh karena itu, $gr(\Gamma_R(M)) = gr(\Gamma_R(M))$. ■

Contoh 25 Diberikan Modul M = Z64 dan R = Z64 , adalah graf torsi $\Gamma_R(M)$ yang memiliki sikel adalah 3 (Gambar 4).



Gambar 4. $(Z_{64})Z_{64}$

KESIMPULAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan diperoleh kesimpulan bahwa graf torsi $\Gamma_R(M)$ berhingga jika dan hanya jika M berhingga atau M adalah $R - modul$ bebas torsi. Diketahui gelanggang R adalah daerah integral maka $\Gamma_R(M)$ adalah graf lengkap. Diketahui M adalah $R - modul$ perkalian dengan $T(M) \neq M$ maka memenuhi Graf Torsi $\Gamma_R(M)$ adalah graf lengkap jika dan hanya jika $\Gamma_R(M)$ adalah graf lengkap dan jika gelanggang R adalah Gelanggang $B\dot{e}zout$ maka $diam(\Gamma_R(M)) = diam(\Gamma_R(M))$.

$\Gamma_R(R)$ adalah graf lengkap, gelanggang R adalah von Neumann reguler dan $R \ncong Ann(x) \oplus Ann(y), x, y \in T(M)^*$, $Nil\ (R) \neq 0$ jika memenuhi salah satu sifat tersebut maka $\Gamma_R(M)$ terhubung dengan $diam(\Gamma_R(M)) \leq 3$. Jika $\Gamma_R(M)$ memiliki sikel, maka $gr(\Gamma_R(M)) = 3$ dan jika M adalah $R - modul$ multiplikasi setia, maka $gr(\Gamma_R(M)) = gr(\Gamma_R(M))$.

REFERENSI

[1] Anderson, F.W. dan K.R. Fuller, 1992, *Rings and Categories of Modules*, Springer-Verlag.

[2] Anderson, David F. dan Dobbs, David E., 1995, Zero Dimensional Commutative Rings, *Proceedings of the 1994 John H. Barret Memorial Lectures and Conference on Commutative Ring Theory*, Marcel Dekker Inc., University of Tennessee, Knoxville, hal.7.

[3] Beck, I., 1988, Algebra ”Coloring of commutative rings”, *J. Algebra*, 116, 208-226.

[4] Bernard, A., 1981, Multiplication Modules, *J.Algebra* 71 (1), hal.174-178.

[5] Chartrand, Gary. Oellermann, Ortrud R., 1993, *Applied and Algoritmic Graph Theory*, McGraw-Hill, Inc.

[6] Diestel, Reinhard, 2000, *Graph Theory*, New York: Springer-Verlag.

[7] Dummit, David S. dan Foote Richard M. (2004). Abstract Algebra Third Edi- tion. John Wiley and Sons..

[8] Ghalandarzadeh, Shaban. Rad, Parastoo Malakooti. dan Sara Shirinkam, 2012, The Connected Subgraph of The Torsion Graph of a Module, *J. Korean Math. Soc*. 49, No. 5, pp. 10311051.

[9] Herstein, I.N., 1999, *Topics in Algebra, Second Edition*, New York: John Wiley and Sons.

[10] Judson, Thomas W., 2010, *Abstract Algebra Theory and Applications*, Stephen F. Austin State University

[11] Keating, M.E., 1998, *A First Course in Module Theory*, London: Imperial College Press.

[12] Rad, P. Malakoti. Yassemi, S., Ghalandarzadeh, dan Safari, P., 2014, Diameter and Girth of Torsion Graph, *Versita* Vol. 22(3), 127-136.

[13] Redmond, S. P., 2007, On Zero-Divisor Graphs of Small Finite Commutative Rings. *Discrete Math*. 307:11551166.

[14] Sh. Ghalandarzadeh, P. Malakooti Rad, 2011, Torsion graph of modules, *Extracta Mathematicae*, Vol 26, Num. 1, 152-163.

[15] Wisbauer, Robert, 1991, *Foundations of Module and Ring Theory*, Gordon and Breach Science Publisher, Reading, University of Dusseldorf.