Jurnal "LOG!K@" , Jilid 8, No. 1, 2018, Hal. 19 - 23
ISSN 1978 – 8568

RAINBOW CONNECTION NUMBER DAN *STRONG RAINBOW CONNECTION NUMBER* PADA SHACKLE GRAF ANTIPRISMA AP_4

Dayinta Andira[1], Yanne Irene[1], Irmatul Hasanah[2]
[1]Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Syarif Hidayatullah Jakarta
Email: dayinta.andira14@uinjkt.ac.id
[2]Universitas Islam Negeri Sultan Maulana Hasanuddin Banten
Email: irmatul.hasanah@uinbanten.ac.id

Abstract: Let G be a nontrivial connected graph. The minimum natural number k of k-edge coloring graph G is rainbow connection number of G, denoted by $rc(G)$. The minimum natural number k of k-edge coloring graph G to be a strongly rainbow connected graph is called strong rainbow connection number of G, denoted by $src(G)$. Shackle operation of some graphs, denoted as $Shack(AP_4, t)$, is a graph of t connected graph AP_4 such that for every $a, b \in [1, t]$ with $|a - b| \geq 2$, G_a and G_b have no common vertex, and for every $i \in [1, t-1], G_i$ and G_{i+1} have one common vertex, called linkage vertex, where all $t - 1$ linkage vertices are different. The shackle application used in this paper are the ones such that its diameter is consistent for any natural number t. Let $\cong Shack(AP_4, t)$, $rc(G) = src(G) = 2t$.
Keywords: rainbow coloring, rainbow connection number, shackle operation, antiprism graph.

Abstrak: Misal G adalah graf terhubung tak trivial. Minimum k warna sedemikian sehingga G memiliki *rainbow-* k*-coloring* merupakan *rainbow connection number*, dinotasikan dengan $rc(G)$. Minimum k warna yang dibutuhkan untuk mewarnai G menjadi *strongly rainbow connected* merupakan *strong rainbow connection number*, dinotasikan dengan $src(G)$. Operasi *shackle* $Shack(AP_4, t)$ adalah graf yang dibentuk dari sebanyak t graf AP_4 yang terhubung sehingga untuk setiap $a, b \in [1, t]$ dengan $|a - b| \geq 2$ berlaku G_a dan G_b tidak mempunyai titik yang sama, dan untuk setiap $i \in [1, t-1], G_i$ dan G_{i+1} tepat mempunyai satu titik yang sama, disebut titik penghubung, dan semua $k - 1$ titik penghubung berbeda. *Shackle* yang digunakan merupakan *shackle* dengan diameter konsisten untuk setiap t bilangan asli. Misalkan $G \cong Shack(AP_4, t)$, $rc(G) = src(G) = 2t$.
Kata Kunci: rainbow coloring, rainbow connection number, operasi shackle, graf antiprisma

PENDAHULUAN

Misal G adalah graf terhubung tak trivial dengan pewarnaan sisi $c : E(G) \rightarrow \{1, 2, , \ldots, k\}$, $k \in \mathbb{N}$, dimana sisi yang bertetangga boleh diwarnai sama. Suatu lintasan $u - v$ di G merupakan *rainbow path* jika tidak ada dua atau lebih sisi dengan warna yang sama. Jika graf G memuat suatu *rainbow* $u - v$ *path* untuk setiap titik $u, v \in G$, graf G disebut *rainbow connected* dengan pewarnaan c. Dalam hal ini, pewarnaan c disebut *rainbow coloring*. Jika pewarnaan c menggunakan sebanyak k warna, maka disebut *rainbow-k-coloring*. Minimum dari k yang terdapat pada *rainbow-k-coloring* pada graf G merupakan *rainbow connection number* pada graf G dan dinotasikan dengan $rc(G)$.

Misal c suatu *rainbow coloring* pada suatu graf terhubung G. Untuk sebarang titik u dan v di G, *rainbow* $u - v$ *geodesic* di G adalah *rainbow path* dengan panjang $d(u, v)$, dimana $d(u, v)$ adalah jarak antara titik u dan v. Graf G dikatakan *strongly rainbow connected* jika G mengandung satu *rainbow* $u - v$ *geodesic* untuk setiap pasang titik u dan v di G. Dalam hal ini, c dikatakan *strong rainbow coloring* dari G. Nilai minimum k dari pewarnaan sisi $c : E(G) \to \{1, 2, , \ldots, k\}$ yang dibutuhkan untuk mewarnai graf G menjadi *strongly rainbow connected* merupakan *strong rainbow connection number* pada graf G dan dinotasikan dengan $src(G)$.

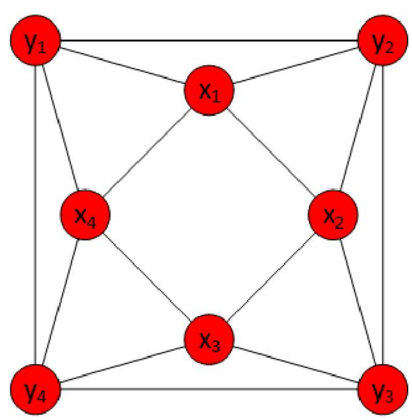
Menurut Chartrand dkk [2], jika G adalah graf terhubung tak trivial dengan *size* m yang diameternya adalah $diam(G)$, maka

$$diam(G) \leq rc(G) \leq src(G) \leq m \tag{1}$$

Chartrand dkk [1] melakukan penelitian *rainbow connection number* dan *strong rainbow connection number* pada beberapa jenis graf khusus seperti graf lingkaran, graf roda, graf lengkap, graf pohon, dan graf lengkap k-*partite.* Dalam tesisnya pada tahun 2015, Darmawan [3] melakukan penelitian *rainbow connection number* dan *strong rainbow connection number* pada beberapa jenis graf khusus, salah satunya pada graf antiprisma (AP_n). Selain itu, Darmawan juga melakukan penelitian *rainbow connection number* dan *strong rainbow connection number* pada beberapa jenis graf khusus yang dioperasikan menggunakan operasi graf, salah satunya adalah operasi *shackle.*

TINJAUAN PUSTAKA

Graf antiprisma dinotasikan dengan AP_n adalah graf dengan himpunan titik $V(AP_n) = \{x_i, y_i | 1 \leq i \leq n\}$ dan himpunan sisi $E(AP_n) = \{x_i x_{i+1} | 1 \leq i \leq n - 1\} \cup \{x_n x_1\} \cup \{y_i y_{i+1} | 1 \leq i \leq n - 1\} \cup \{y_n y_1\} \cup \{x_i y_i | 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_i y_{i+1} \, | 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_n y_1\}$. Berikut adalah gambar graf antiprisma AP_4.

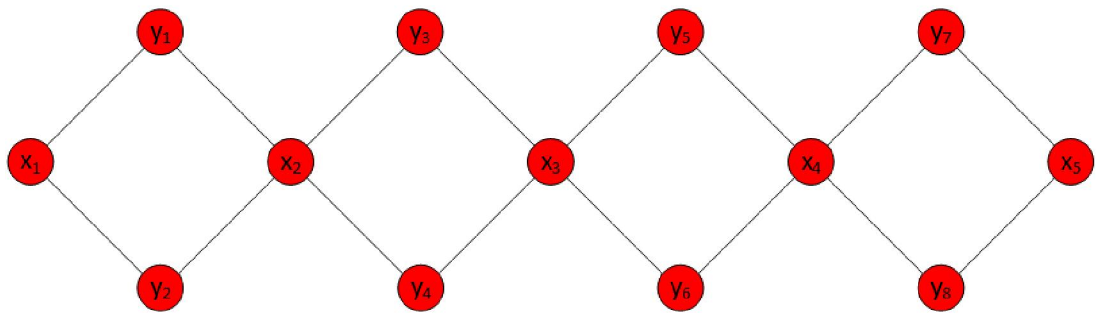


Gambar 1. Graf Antiprisma $\boldsymbol{AP_4}$

Definisi. Graf *shackle* dinotasikan dengan $shack(G_1, G_2, \ldots, \mathrm{G_k})$ merupakan sebuah graf yang dibentuk dari k graf terhubung tak trivial $G_1, G_2, \ldots, G_k$ sehingga untuk setiap $s, t \in [1, k]$ dengan $|s - t| \geq 2$ berlaku G_s dan G_t tidak mempunyai titik yang sama, dan untuk setiap $i \in [1, k - 1]$, G_i dan G_{i+1} tepat mempunyai satu titik yang sama, disebut titik penghubung, dan semua $\mathrm{k}-1$ titik penghubung berbeda. Jika *shackle* terbentuk dari sebanyak k graf H yang terhubung, maka *shackle* dinotasikan dengan $shack(H,k)$ [5].

HASIL DAN PEMBAHASAN

Suatu operasi graf *shackle* dari t graf antiprisma $AP_{(4)1}, AP_{(4)2}, \dots, AP_{(4)t}$ dinotasikan dengan $Shack(AP_4,t)$. Misal $G \cong Shack(AP_4,t)$. Graf G memiliki himpunan titik $V(G) = \{w_i, x_{j,k}, y_{j,k}, z_l | 1 \le i \le t+1, 1 \le j \le t, 1 \le k \le 2, 1 \le l \le 2t\}$ dengan $|V(G)| = 7t+1$ dan himpunan sisi $E(G) = \{x_{i,j}x_{i,j+1} | 1 \le i \le t, j=1\} \cup \{y_{i,j}y_{i,j+1} | 1 \le i \le t, j=1\} \cup \{x_{i,j}y_{i,j} | 1 \le i \le t, 1 \le j \le 2\} \cup \{w_i z_{2i-1} | 1 \le i \le t\} \cup \{w_i z_{2i} | 1 \le i \le t\} \cup \{w_{i+1} z_{2i} | 1 \le i \le t\} \cup \{w_{i+1} z_{2i-1} | 1 \le i \le t\} \cup \{x_{i,j} w_i | 1 \le i \le t, j=1\} \cup \{x_{i,j} w_{i+1} | 1 \le i \le t, j=2\} \cup \{x_{i,j} z_{2i-1} | 1 \le i \le t, 1 \le j \le 2\} \cup \{y_{i,j} w_i | 1 \le i \le t, j1\} \cup \{y_{i,j} w_{i+1} | 1 \le i \le t,\ j=2\} \cup \{y_{i,j} z_{2i} | 1 \le i \le t,\ 1 \le j \le 2\}$ dengan $|E(G)| = 16t$. Gambar 2 merupakan graf hasil operasi *Shackle* $\boldsymbol{C_4}$.



Gambar 2. Graf Hasil Operasi *Shackle* $\boldsymbol{C_4}$

Teorema 3.1. *Misal* t *bilangan bulat positif dengan* $t \ge 2$ *dan* $G \cong Shack(AP_4,t)$. *Maka* $rc(G) = 2t$.

Bukti.
Misal G adalah $Shack(AP_4,t)$ yang memiliki himpunan titik

$$V(G) = \{w_i, x_{j,k}, y_{j,k}, z_l | 1 \le i \le t+1, 1 \le j \le t, 1 \le k \le 2, 1 \le l \le 2t\}$$

dengan $|V(G)| = 7t+1$ dan himpunan titik $E(G) = \{x_{i,j}x_{i,j+1} | 1 \le i \le t, j=1\} \cup \{y_{i,j}y_{i,j+1} | 1 \le i \le t, j=1\} \cup \{x_{i,j}y_{i,j} | 1 \le i \le t,\ 1 \le j \le 2\} \cup \{w_i z_{2i-1} | 1 \le i \le n\} \cup \{w_i z_{2i} | 1 \le i \le t\} \cup \{w_{i+1} z_{2i} | 1 \le i \le t\} \cup \{w_{i+1} z_{2i-1} | 1 \le i \le t\} \cup \{x_{i,j} w_i | 1 \le i \le t, j=1\} \cup \{x_{i,j} w_{i+1} | 1 \le i \le t, j=2\} \cup \{x_{i,j} z_{2i-1} | 1 \le i \le t, 1 \le j \le 2\} \cup \{y_{i,j} v_i | 1 \le i \le t, j=1\} \cup \{y_{i,j} w_{i+1} | 1 \le i \le t, j=2\} \cup \{y_{i,j} z_{2i} | 1 \le i \le t,\ 1 \le j \le 2\}$ dengan $|E(G)| = 16t$. Graf G memiliki $diam(G) = 2t$.
Berdasarkan pertidaksamaan (1) maka

$$diam(G) \le rc(G) \le m$$

$$2t \le rc(G) \le 16t$$

Selanjutnya akan ditunjukkan $rc(G) = 2t$ yang dibagi ke dalam dua kasus.

(i) Akan ditunjukkan $rc(G) \le 2t$

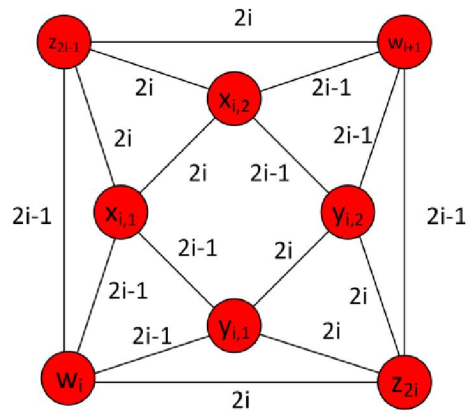
Didefinisikan pewarnaan sisi c sebagai berikut.

$$c(e) = \begin{cases} 2i-1 & e = x_{i,j}y_{i,j}; & 1 \le i \le t; 1 \le j \le 2 \\ & e = x_{i,j}w_i;\ e = y_{i,j}w_i; & 1 \le i \le t; j = 1 \\ & e = x_{i,j}w_{i+1};\ e = y_{i,j}w_{i+1}; & 1 \le i \le t; j = 2 \\ & e = w_i z_{2i-1};\ e = w_{i+1}z_{2i}; & 1 \le i \le t \\ 2i & e = y_{i,j}z_{2i};\ e = x_{i,j}z_{2i-1}; & 1 \le i \le t; 1 \le j \le 2 \\ & e = x_{i,j}x_{i,j+1};\ e = y_{i,j}y_{i,j+1}; & 1 \le i \le t; j = 1 \\ & e = w_i z_{2i};\ e = w_{i+1}z_{2i-1}; & 1 \le i \le t \end{cases}$$

Berdasarkan pendefinisian tersebut, diperoleh bahwa $c : E(G) \to \{1, 2, \ldots, 2t\}$ sehingga $rc(G) \le 2t$.

(ii) Akan ditunjukkan $rc(G) \ge 2t$
Graf G memiliki $diam(G) = 2t$. Berdasarkan pertidaksamaan (1) maka $2t \le rc(G)$ sehingga terbukti bahwa $rc(G) \ge 2t$.

Berdasarkan (i) dan (ii) dapat disimpulkan bahwa $rc(G) = 2t$. □



Gambar 3. Pewarnaan *Rainbow* pada Komponen ke-i *Shackle* Graf Antiprisma AP_4

Teorema 3.2. *Misal t bilangan bulat positif dengan $t \ge 2$ dan $G \cong Shack(AP_4, t)$. Maka $rc(G) = src(G) = 2t$.*

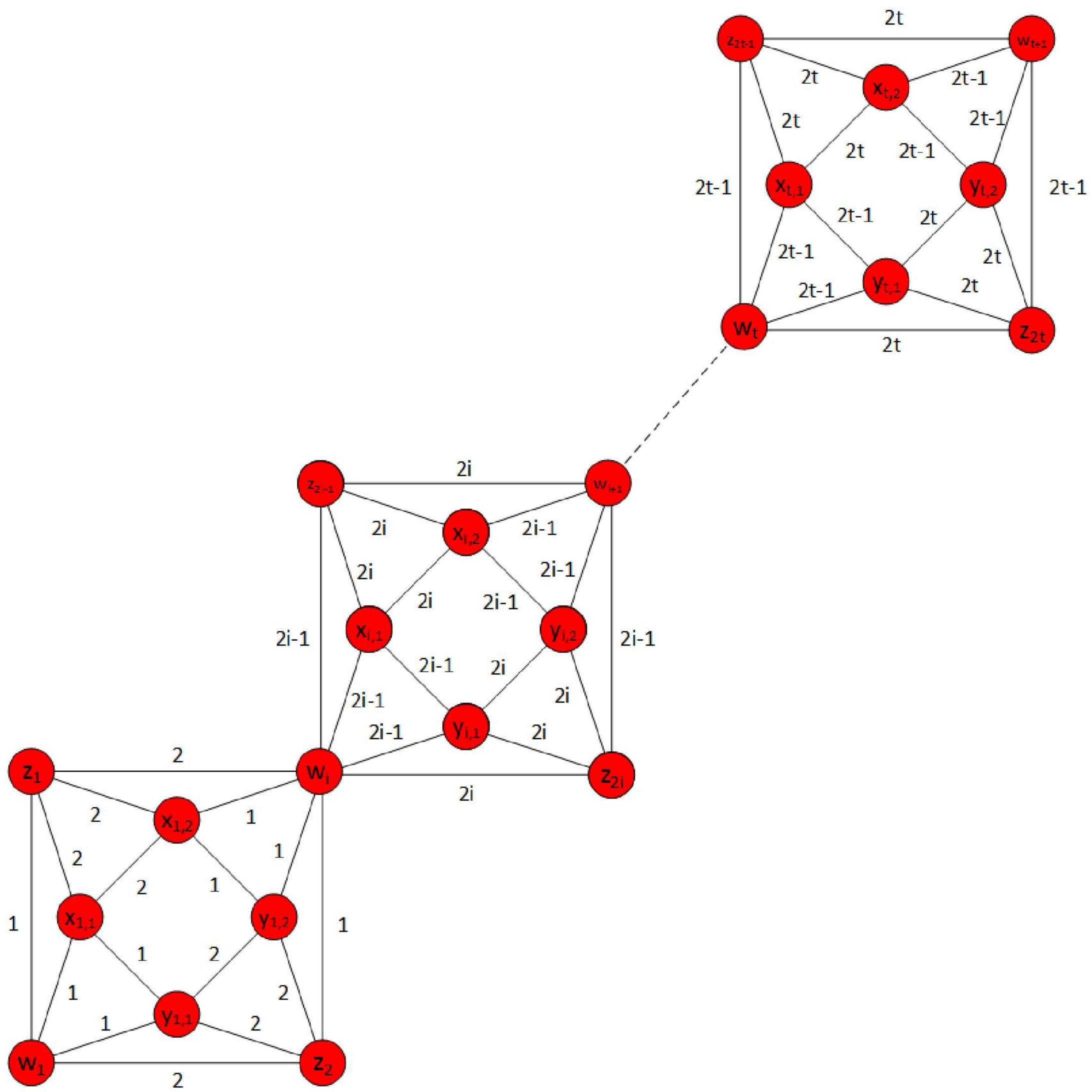
Bukti.

Misal $G \cong Shack(AP_4, t)$. Berdasarkan pertidaksamaan (1), nilai $rc(G) \le src(G)$. Telah ditunjukkan bahwa nilai $rc(G) = 2t$. Dengan mendefinisikan pewarnaan $c : E(G) \to \{1, 2, \ldots, 2t\}$, akan dibuktikan bahwa $2t \le src(G)$.

$$c(e) = \begin{cases} 2i-1 & e = x_{i,j}y_{i,j}; & 1 \le i \le t; 1 \le j \le 2 \\ & e = x_{i,j}w_i;\ e = y_{i,j}w_i; & 1 \le i \le t; j = 1 \\ & e = x_{i,j}w_{i+1};\ e = y_{i,j}w_{i+1}; & 1 \le i \le t; j = 2 \\ & e = w_i z_{2i-1};\ e = w_{i+1}z_{2i}; & 1 \le i \le t \\ 2i & e = y_{i,j}z_{2i};\ e = x_{i,j}z_{2i-1}; & 1 \le i \le t; 1 \le j \le 2 \\ & e = x_{i,j}x_{i,j+1};\ e = y_{i,j}y_{i,j+1}; & 1 \le i \le t; j = 1 \\ & e = w_i z_{2i};\ e = w_{i+1}z_{2i-1}; & 1 \le i \le t \end{cases}$$

Berdasarkan pendefinisian tersebut, maka jelaslah bahwa $src(G) \le 2t$.

Setiap titik pada graf antiprisma AP_4 seluruhnya dihubungkan oleh lintasan *geodesic* dengan $diam(AP_4) = 2$, misal $d(w_1, w_2) = d(z_1, z_2) = d(w_1, x_{1,2}) = d(w_1, y_{1,2}) = d(w_2, x_{1,1}) = d(w_2, y_{1,1}) = d(z_1, y_{1,1}) = d(z_1, y_{1,2}) = d(z_2, x_{1,1}) = d(x_{1,1}, y_{1,2}) = d(x_{1,2}, y_{1,1}) = 2$. Hal ini juga berlaku untuk seluruh titik pada graf G, sehingga setiap lintasan *geodesic* sudah diwarnai dengan pewarnaan-$2t$ *strong rainbow* berdasarkan pendefinisian pewarnaan-$2t$ *rainbow*. Jadi $src(G) = rc(G) = 2t$.



Gambar 4. Pewarnaan-2t *Rainbow* pada *Shackle* Graf Antiprisma $\boldsymbol{AP_4}$

KESIMPULAN

Teorema *Misal* t *bilangan bulat positif dengan* $t \geq 2$ *dan* $G \cong Shack(AP_4, t)$. *Maka* $rc(G) = src(G) = 2t$.

REFERENSI

[1] Chartrand, G., & dkk. 1993. *Applied and Algoritmic Graph Theory.* New York: Mac Graw-Hill, Inc.

[2] Chartrand, G., & dkk. 2008. Rainbow Connection in Graphs. *Math Bohem* 133(1), hal. 85-98.

[3] Darmawan, R. N. 2015. *Analisis Rainbow Connection Number pada Graf Khusus dan Hasil Operasinya. Tesis.* Universitas Jember.