Jurnal "LOG!K@" , Jilid 7, No. 2, 2017, Hal. 86 - 95
ISSN 1978 – 8568

GRAF TORSI ATAS MODUL

Budi Harianto dan Sarah Harefah Saputri
Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Syarif Hidayatullah Jakarta
Email: budi.harianto@uinjkt.ac.id, sarah.harefah13@mhs.uinjkt.ac.id

Abstract:.Let R be a commutative ring and M be an R-module. We associate to Ma graph denoted by, $\Gamma(M)$ called the torsion graph of M, whose vertices are the non-zero torsion elements of M and two distinct element x, y are adjacent if and only if $[x : M][y : M]\, M = 0$. We investigate the interplay between module-theoritic properties of M and graph-theoritic properties of $\Gamma(M\,)$.
Keywords:.*Torsion graph, multiplication modules, Torsion graph of modules*.

Abstrak: Misalkan R adalah gelanggang komutatif dan M adalah R-modul. Kita mengaitkan M sebagai suatu graf yang dinotasikan dengan $\Gamma(M)$ yang disebut graf torsi dari M dimana simpul-simpulnya adalah elemen torsi bukan nol dari M dan dua elemen berbeda x, y bertetangga jika dan hanya jika $[x : M][y : M]\, M = 0$. Kita menginvestigasi hubungan antara sifat teori modul dari M dan sifat teori graf dari $R(M)$.
Kata kunci: *Graf Torsi*, *Modul Multiplikasi*, *Graf Torsi Atas Modul*.

PENDAHULUAN

Konsep graf pembagi nol gelanggang komutatif diperkenalkan Oleh I. Beck pada tahun 1988 [7]. Dia memberikan semua elemen dari gelanggang menjadi simpul-simpul dari graf dan terutama tertarik dalam mewarnai investigasi dari pewarnaan gelanggang komutatif dilanjutkan oleh Anderson dan Naseer di [4]. Pada [3], Anderson dan Livingston memperkenalkan dan mempelajari graf pembagi nol dimana simpul-simpulnya adalah pembagi nol bukan nol dan dimana $x - y$ adalah sisi bila saja $xy = 0$. Graf pembagi nol dari gelanggang komutatif telah dipelajari secara ekstensif oleh Anderson, Frazier, Lauve, Levy, Livingston dan Shapiro, lihat [2, 3]. Graf pembagi nol telah diperluas ke gelanggang non-komutatif oleh Redmond di [14]. Graf pembagi nol juga telah diperkenalkan dan dipelajari untuk semigrup oleh DeMeyer dan Schneider di [9], dan untuk gelanggang bertetangga Oleh Cannon dkk di [8].

Misalkan R adalah gelanggang komutatif dengan identitas dan M adalah R-modul yang menjadi satu unit. Dalam tulisan ini, kami akan menyelidiki konsep dari graf torsi untuk modul sebagai penurunan alami dari graf pembagi nol terhadap gelanggang, yang telah didefinisikan oleh Ghalandarzadeh dan Rad Malakooti di [12]. Residual dari Rx oleh M, dilambangkan dengan $[\mathrm{x} : \mathrm{M}]$, adalah himpunan elemen $\mathrm{r} \in \mathrm{R} : \mathrm{rM} \subseteq \mathrm{Rx}$ untuk $\mathrm{x} \in \mathrm{M}$. Annihilator dari R-modul M dinotasikan dengan $\mathrm{Ann}_{\mathrm{R}}(\mathrm{M})$ adalah $[0 : \mathrm{M}]$.

Misalkan $\mathrm{T(M)}$ adalah himpunan elemen dari M sehingga $\mathrm{Ann(m)} \neq 0$. Jelas bahwa jika R adalah daerah integral, maka T(M) adalah submodul dari M, dan ini disebut submodul torsi dari M. Jika $\mathrm{T(M)} = 0$, maka modul M dikatakan bebas torsi, dan ini disebut modul torsi jika $\mathrm{T(M)} = \mathrm{M}$. Graf torsi $\Gamma(\mathrm{M})$dari M adalah graf sederhana yang simpul-simpulnya adalah elemen torsi bukan nol dari M, dan dua elemen yang berbeda x, y bertetangga jika dan hanya jika $[x : M][y : M]\, M = 0$. Jadi, Γ(M) adalah graf kosong jika dan hanya jika M adalah R-modul bebas torsi. Dalam tulisan ini, kita akan menyelidiki interaksi sifat modul M dalam kaitannya dengan sifat Γ(M). Kami percaya bahwa penelitian ini membantu pembelajaran struktur T(M). Sebagai contoh, jika M adalah R-modul perkalian tetap, kita menunjukkan bahwa M terbatas jika dan hanya jika $\Gamma(M)$ terbatas. Juga, kita berpikir bahwa graf torsi membantu kita mempelajari sifat aljabar dari modul yang menggunakan teori graf. Untuk $x, y \in T(M)^* = \mathrm{T(M)} - \{0\}$, tentukan $x \sim y$ jika $[x : M]\,[y : M]\, M = 0$ atau $x = y$. Relasi $\sim$ selalu refleksif dan simetris, tapi biasanya tidak transitif. Graf torsi Γ(M) mengukur kurangnya transitivitas dalam arti bahwa transitif jika dan hanya jika Γ(M) selesai.

R-modul M disebut modul perkalian jika untuk setiap submodul K dari M, ideal I dari R sehingga $K = IM$ [6]. Sebuah submodul N yang tepat dari M disebut submodul utama M, jika $rm \in N$ (dimana $r \in R$ dan $m \in M$) artinya $m \in N$ atau $r \in [N : M]$.

Ingat bahwa graf terbatas jika kedua simpul set dan set tepinya terbatas, dan kita menggunakan simbol $|\Gamma(M)|$ Untuk menunjukkan jumlah simpul-simpul dalam graf $\Gamma(M)$. Juga, graf G terhubung jika ada jalur antara dua simpul yang berbeda. Jarak $d(x, y)$ antara simpul-simpul yang terhubung x, y adalah panjang jalur terpendek dari x ke y ($d(x, y) = \infty$ jika tidak ada jalur seperti itu). Diameter G adalah diameter graf yang terhubung, yang merupakan supremum jarak antara simpul. Diameter 0 jika graf terdiri dari satu simpul. Ketebalan G, dilambangkan dengan $\mathrm{gr}(G)$, didefinisikan sebagai panjang sirkuit terpendek dalam G (gr(G) = ∞ jika G tidak terdapat sirkuit).

Pada bagian 2, kita memberikan banyak contoh dan kita menunjukkan bahwa Γ(M) selalu terhubung dengan diam $(\Gamma(M)) \leq 3$ jika M adalah R-modul.

Sepanjang tulisan ini, untuk $N \subseteq M$, kita membiarkan $N^* = N - \{0\}$. Seperti biasa, gelanggang bilangan bulat dan bilangan bulat modulo n masing-masing dilambangkan dengan $\mathbb{Z}$ dan $\mathbb{Z}_n$. Kami menggunakan simbol (x, y) atau $x + y$ untuk menunjukkan elemen $M = M_1 \oplus M_2$. Juga, kita menggunakan simbol $(M)_R$untuk menunjukkan M sebagai R-modul.

$$Nil(M) \coloneqq \bigcap_{N \in Spec(M)} N,$$

dimana $Spec\,(M)$ adalah satu set submodul utama M, dan akhirnya $D(M) := \{m \in M : [m : M]\,[m' : M]\, M = 0$ untuk beberapa non-nol $m \in M\}$. Untuk menghindari hal-hal kecil ketika Γ(M) kosong, kita akan menganggap secara implisit, jika perlu bahwa M bukan bebas torsi.

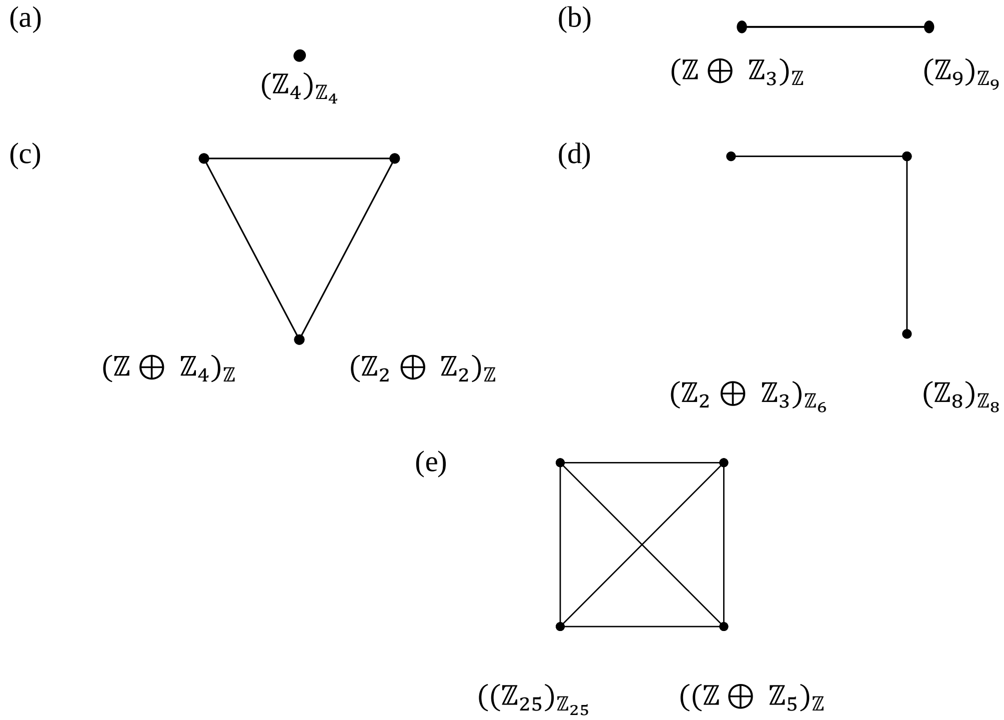
HASIL DAN PEMBAHASAN

Sifat dari $\boldsymbol{\Gamma(M)}$

Pada bagian ini, akan ditunjukkan bahwa jika M modul, maka Γ(M) terhubung dan memiliki diameter dan ketebalan yang kecil.

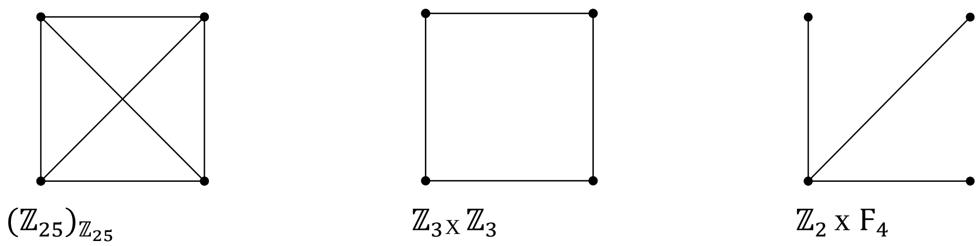
Contoh 1.1. (a) Misalkan $M = M_1 \oplus M_2$ adalah R-modul, dimana M adalah modul bebas torsi. Jadi $T(M)^* = \{(0;\, m2) : m2 \in T(M_2)^*\}$ dan $[(0 : m_2) : M] = 0$. Oleh karena itu

Γ(M) adalah graf lengkap. Berikut adalah graf torsi untuk beberapa modul. Perhatikan contoh-contoh pada Gambar.1. Hal ini menunjukkan bahwa modul non-isomorfik mungkin memiliki graf torsi yang sama.



Gambar 1. Beberapa contoh graf torsi Γ(M) untuk modul non-isomorfik.

(b). Dari bagian (a) di atas, semua graf terhubung dengan simpul-simpulnya kurang dari empat, dapat dianggap sebagai Γ(M). Dari sebelas graf dengan empat simpul, hanya enam graf yang terhubung. Dari enam graf tersebut, hanya tiga graf berikut yang dapat direalisasikan sebagai Γ(M). Ketika M adalah R-modul perkalian tetap, ada tiga Γ(R) [3].



Gambar 2. Γ(M) dengan 4 simpul.

Jelas bahwa setiap gelanggang R adalah perkalian R-modul. Selanjutnya kami menjelaskan sebuah bukti bahwa graf G dengan simpul-simpul $\{a, b, c, d\}$ dan sisi $a - b, b - c, c - d$ tidak dapat direalisasikan sebagai $\Gamma(M)$. Misalkan ada gelanggang R dan perkalian R-modul tetap dengan $T(M)^* = \{a, b, c, d\}$ bersama hanya dengan hubungan torsi di atas. Perhatikan

$$[a : M]\,[b : M]\,M = 0 = [b : M]\,[c : M]\,M\,,$$

Kemudian,

$$[b\colon M]\; a \;=\; 0 \;=\; [b\colon M]\; c$$

dan $[b\colon M]\,[a\,+\,c\colon M]\,M\;=\;0$. Oleh karena itu, $a\,+\,c\,\in\,T(M)^{*}$ sehingga $a\,+\,c$ harus berupa a, b, c atau d. Jika $a\,+\,c\,=\,a$ atau $a\,+\,c\,=\,c$, maka $a\,=\,0$ atau $c\,=\,0$ dan terdapat kontradiksi. Lalu, jika $a\,+\,c\,=\,d$, maka $[d\,:\,M]\,[b\,:\,M]\,M\;=\;0$, yang merupakan kontradiksi. Oleh karena itu, $a\,+\,c\,=\,b$ adalah satu-satunya kemungkinan. Demikian pula, $b\,+\,d\,=\,c$. Oleh karena itu $b\,=\,a\,+\,c\,=\,a\,+\,b\,+\,d$; Jadi $[a\,:\,M]\,[d\,:\,M]\,M\,=\,0$, yang merupakan kontradiksi. Bukti untuk dua graf yang tidak dapat direalisasikan pada empat simpul yang serupa.

Teorema 1.2. *Jika M adalah R-modul perkalian, maka untuk* $n \geq 5$, *$\Gamma(M)$ merupakan graf yang tidak memuat n-poligon.*

Bukti. Andaikan $\Gamma(M)$ merupakan graf dengan n-poligon. Misalkan graf G adalah graf terhubung dengan simpul $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ dan $\Gamma(M)$ menjadi graf dengan sisi

$$\{a_1 - a_2\,, a_2\; - a_3\,, \ldots\ldots, a_{n-2} - a_{n-1}\,, a_{n-1} - a_n, a_n - a_1\}$$

Artinya

i) $[a_1\,:\,M][a_2\,:\,M]M\;=\;0\;=\;[a_n\,:\,M][a_1\,:\,M]M$
$[a_1\,:\,M][a_2\,:\,M]M\;=\;0\;=\;[a_1\,:\,M][a_n\,:\,M]M$
$[a_1\,:\,M]\,a_2 =\;0\;=\;[a_1\,:\,M]\,a_n$
$[a_1\colon M][a_2\,+\,a_n\,:\,M]M\;=\;0$, oleh karena itu $a_2\,+\,a_n$ haruslah salah satu simpul $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Misalkan $a_2\,+\,a_n = a_2$ maka $a_n = 0$, hal ini tidak mungkin. Misalkan $a_2\,+\,a_n = a_n$ maka $a_2 = 0$, hal ini tidak mungkin. Misalkan $a_2\,+\,a_2\,=\,a_3$, maka $[a_1\,:\,M][a_3\,:\,M]M = 0$, hal ini kontradiksi. Maka $a_2\,+\,a_2\,=\,a_1$ adalah satu-satunya kemungkinan.

ii) $[a_{n-1}\,:\,M][a_n\,:\,M]M\;=\;0\;=\;[a_n\,:\,M][a_1\,:\,M]M$
$[a_n\,:\,M][a_{n-1}\,:\,M]M\;=\;0\;=\;[a_n\,:\,M][a_1\,:\,M]M$
$[a_n\,:\,M]\,a_{n-1} =\;0\;=\;[a_n\,:\,M]\,a_1$
$[a_n\colon M][a_{n-1}\,+\,a_1\,:\,M]M\;=\;0$, oleh karena itu $a_{n-1} + a_1$ haruslah salah satu simpul $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Misalkan $a_{n-1}\,+\,a_1 = a_1$ maka $a_{n-1} = 0$, hal ini tidak mungkin. Misalkan $a_{n-1} + a_1 = a_{n-1}$ maka $a_1\,= 0$, hal ini tidak mungkin. Misalkan $a_{n-1} + a_1\,=\,a_2$, maka $[a_n\,:\,M][a_2\,:\,M]M = 0$, hal ini kontradiksi. Maka $a_{n-1} + a_1 = a_n$ adalah satu-satunya kemungkinan.

Berdasarkan i) dan ii) $a_n = a_{n-1} + a_2 + a_n$, maka $[a_{n-1}\colon M][a_2\colon M]\;M\;=\;0$. Hal ini kontradiksi. Maka untuk $n \geq 5$ Γ(M) merupakan graf yang tidak dapat memuat n-poligon. ■

Graf r-partite adalah suatu graf yang kumpulan vertex-nya dapat dipartisi menjadi subset r sehingga tidak ada ujung yang memiliki kedua ujung pada satu subset graf. Graf r-partite lengkap adalah suatu graf dimana setiap simpul-simpul digabungkan ke setiap simpul yang ada di subset lain. Graf 90ipartite lengkap (graf 2-partit) dengan simpul-simpul himpunan elemen m dan n, masing-masing, akan dilambangkan dengan $K_{m,n}$. Graf 90ipartite lengkap dari bentuk $K_{1,n}$ disebut graf bintang.

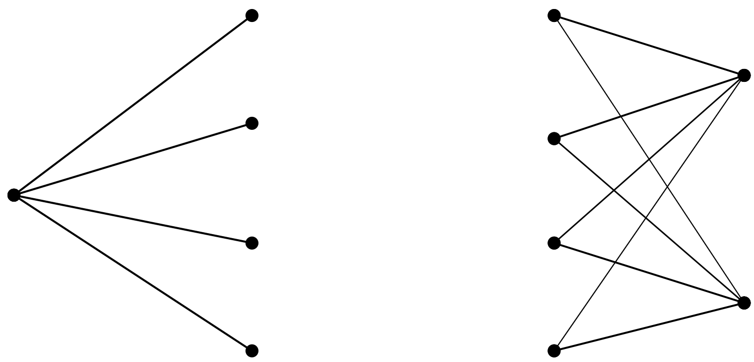
Contoh 1.3. Misalkan M_1 menjadi R-modul perkalian bebas torsi dan M_2 menjadi R_2-modul perkalian bebas torsi, maka $M = M_1 \times M_2$ adalah $R = R_1 \times R_2$ modul dengan perkalian.

$$R \times M \to M, \qquad (r_1, r_2)(m_1, m_2) = (r_1 m_1, r_2 m_2).$$

Γ(M) adalah graf ipartite lengkap (yaitu, Γ(M) dapat dipartisi menjadi dua himpunan ipart yang terputus):

$$V_1 = \{(m_1, 0) : m_1 \in {M_1}^*\}, \qquad V_2 = \{(0, m_2) : m_2 \in {M_1}^*\},$$

dan dua simpul x dan y bertetangga jika dan hanya jika berada di simpul yang berbeda himpunan), dengan Γ(M)$| = |M_1| + |M_2| - 2$. Berikut adalah dua contoh spesifik:



Gambar 3. Graf ipartite lengkap Γ(M).

Kita tahu bahwa Γ(M) mungkin tak terbatas (yaitu, R-modul M memiliki elemen torsi tak terbatas). Tapi kasus yang menarik terjadi ketika Γ(M) terbatas, karena dalam kasus yang terbatas, gambar graf mungkin terjadi. Pertama, kita memusatkan perhatian seseorang pada graf tak terbatas dan kemudian dalam artikel ini kita akan mempertimbangkan kasus graf terbatas yang menarik, dan teorema berikutnya menunjukkan bahwa Γ(M) terbatas (kecuali bila Γ(M) kosong) jika dan hanya jika M terbatas .

Teorema 1.4. *Misalkan R gelanggang komutatif dan M R-modul perkalian setia. Kemudian (M) terbatas jika dan hanya jika M adalah terbatas atau M adalah R-modul bebas torsi. Jika $1 \leq |\Gamma(M)| < \infty$, maka M adalah terbatas dan tidak bebas torsi.*

Bukti. $(\Longrightarrow)$ Diketahui R adalah gelanggang komutatif dan M adalah R-modul perkalian setia, artinya untuk setiap submodule N di M terdapat I di R sehingga berlaku $N = IM$ dan $\mathrm{Ann}(M) = \{0\}$. Misalkan $\Gamma(M)(= T(M)^*)$ berhingga dan tak kosong, maka terdapat $x \in T(M)^*$ sedemikian sehingga $rx = 0$, untuk suatu $r \in R$. Misalkan $N \coloneqq [x: M]M$ dan misalkan $0 \neq s \in [x: M]$, maka $rn = 0$, untuk setiap $n \in N$. Karenanya $N \subseteq T(M)^*$ berhingga dan $sm \in N$ untuk setiap $m \in M$. Andaikan M tak berhingga, maka terdapat suatu $n \in N$ dengan $H = \{m \in M : sm = n\}$ tak berhingga. Ambil sebarang $m_{1,}\, m_2 \in H$ maka $sm_{1,} = n$ dan $m_{2,} = n$.

Perhatikan:

$$sm_1 - sm_2 = s(m_1 - m_2) = 0$$

maka haruslah $(m_1 - m_2) \in T(M)^*$ berhingga. Hal ini kontradiksi, M haruslah berhingga.

$(\Leftarrow)$ Misalkan M berhingga, berdasarkan definisi $T(M)$ jelas bahwa $T(M) \subseteq M$. Karenanya $T(M)^*$ berhingga artinya $\Gamma(M)$ berhingga. ■

Contoh selanjutnya menunjukan bahwa kondisi perkalian berguna.

Contoh 1.5. Misalkan $M = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_3$ adalah $\mathbb{Z}$-modul. Hal ini jelas bahwa M adalah modul perkalian tak berhingga, tetapi $T(M)^* = \{(0, \bar{1}), (0, \bar{2})\}$ maka $\Gamma(M)$ berhingga.

Contoh 1.6 (a), menunjukan beberapa R-modul dengan $\mathrm{diam}\big(\Gamma(M)\big) = 0{,}1$ atau 2. Dalam $R = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4$, lintasan $(\bar{0}, \bar{1}) - (\bar{1}, \bar{0}) - (\bar{0}, \bar{2}) - (\bar{1}, \bar{2})$ menunjukan bahwa $\mathrm{diam}(\Gamma(R_R)) = 3$.

Selanjutnya kita akan menunjukan bahwa graf torsi dari R-modul setia terhubung dengan diameter ≤ 3.

Toerema 1.7. *Misalkan R adalah gelanggang komutatif dan M adalah R-modul setia. $\Gamma(M)$ terhunbung dan diam $\big(\Gamma(M)\big) \leq 3$. Bahkan, jika $\Gamma(M)$ memuat sirkuit, maka $gr\big(\Gamma(M)\big) \leq 7$.*

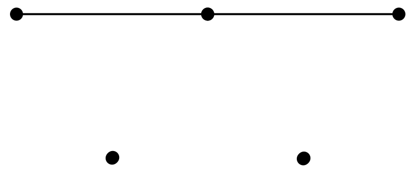
Bukti. Misalkan $x, y \in T(M)^*$ adalah elemen berbeda. Jika $[x: M]$ atau $[y: M]$ atau $[x: M][y: M]$ adalah nol, maka $d(x, y) = 1$. Karena itu, kita misalkan $[x: M][y: M]$ tak nol, maka terdapat elemen tak nol $\alpha \in [x: M][y: M]$.

Jika $[x: M]^2 = [y: M]^2 = 0$ maka terdapat $m \in M$ sedemikian sehingga $\alpha m \in T(M)^*$, karenanya $x - \alpha m - y$ adalah lintasan dengan panjang 2, dengan demikian $d(x, y) = 2$. Sekarang misalkan $[x: M]^2 = 0$ dan $[y: M]^2 \neq 0$, karena $y \in T(M)^*, sy = 0$ untuk suatu $0 \neq s \in R$. Sekarang kita meninjau kasus $[x: M]\mathrm{Ann}(y) = 0$. Dalam kasus ini $sm_0 \in T(M)^*$ untuk suatu $m_0 \in M$, maka $x - m_0 - y$ adalah lintasan dengan panjang 2.Dalam kasus lain, jika $[x: M]\mathrm{Ann}(y) \neq 0$, maka $m_1 := \alpha_1 tm \in T(M)^*$ untuk suatu elemen tak nol $\alpha_1 \in [x: M], t \in \mathrm{Ann}(y), m \in M$ dan $x - m_1 - y$ adalah lintasan dengan panjang 2. Arguman yang sama berlaku jik$[x: M]^2 \neq 0, [y: M] = 0$. Dengan demikian, kita bisa berasusmi bahwa $[x: M]^2, [y: M]^2$, dan $[x: M][y: M]$ tak nol.

Jika $\mathrm{Ann}(x) \nsubseteq \mathrm{Ann}(y)$ dan $\mathrm{Ann}(y) \nsubseteq \mathrm{Ann}(x)$, maka terdapat elemen tak nol $r, s \in R$ sedemikian sehingga $rx = 0, ry \neq 0$ dan $sx \neq 0, sy = 0$, karenanya $ry, sx \in T(M)^*$. Sekarang jika $ry \neq sx$, maka $x - ry - sx - y$ adalah lintasan dengan panjang 3. Dalam kasus lain, jika $ry = sx$, maka $x - ry - y$ adalah path dengan panjang 2. Karena itu, $d(x, y) \leq 3$. Dengan demikian kita dapat berasumsi bahwa $\mathrm{Ann}(x) \subseteq \mathrm{Ann}(y)$ atau $\mathrm{Ann}(y) \subseteq \mathrm{Ann}(x)$, jika $\mathrm{Ann}(x) \subseteq \mathrm{Ann}(y)$, maka $rm \in T(M)^*$ untuk suatu $r \in \mathrm{Ann}(x), m \in M$ dan $x - rm - y$ adalah lintasan dengan panjang 2. Argument yang sama berlaku jika $\mathrm{Ann}(y) \subseteq \mathrm{Ann}(x)$. Karenanya $d(x, y) \leq 3$, dengan demikian $\mathrm{diam}(\Gamma(M) \leq 3$. Statmen “Bahkan, jika $\Gamma(M)$ memuat sirkuit” merujuk dari [10]. ■

Contoh selanjutnya menunjukan bahwa kondisi setia berlaku.

Contoh 1.8. Misalkan $M = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3$ adalah $\mathbb{Z}$-modul, maka $\Gamma(M)$ tidak terhubung.



Gambar 4. $\Gamma(M)$ tidak terhubung, untuk $M = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3$.

Anderson dan Livingston [3], membuktikan jika Γ(R) memuat sirkuit, maka gr$(R) \leq 7$. Mereka juga membuktikan gr$(R) \leq 4$ ketika R adalah Artinian. Teorema berikut menunjukan bahwa gr$(R) \leq 4$ untuk gelanggang komutatif.

Teorema 1.9. *Misalkan M adalah R-modul perkalian. Jika $\Gamma(M)$ memuat sirkuit, maka $gr(M) \leq 4$.*

Bukti. Misalkan $m_0 - m_1 - m_2 - \cdots - m_n - m_0$ menjadi sirkuit terpendek dari $T(M)$ untuk $n > 4$. Jika

$$[m_1 : M][m_{n-1} : M]M = 0,$$

maka $\Gamma(M)$ mengandung sirkuit

$$m_1 - m_2 - \cdots - m_{n-1}.$$

Hal ini kontradiksi. Sehingga terdapat elemen tak nol $\alpha \in [m_1 : M], \beta \in [m_{n-1} : M]$ dan $m \in M$ sedemikian sehingga $\alpha\beta m \in V(\Gamma(M))$. Jika $\alpha\beta m \neq m_0$ dan $\alpha\beta m \neq m_n$, maka $\Gamma(M)$ memuat sirkuit $m_0 - \alpha\beta\mathrm{m} - m_n - m_0$ kontadiksi. Dengan demikian

$$\alpha\beta\mathrm{m} = m_0 \text{ atau } \alpha\beta\mathrm{m} = m_n$$

maka, tanpa menghilangkan keumuman, asumsikan $\alpha\beta\mathrm{m} = m_0$, dengan ini $[m_0 : M]m_0 = 0$. Sekarang kita tunjukan bahwa $Rm_0 = \{0, m_0\} \subset Rm_1$. Jika terdapat elemen tak nol $x \in Rm_0$ sedemikian sehingga $x \neq m_0$, maka $m_0 - m_1 - x - m_0$ adalah sirkuit dengan panjang 3. Hal ini kontradiksi. Karenanya terdapat $y \in Rm_1$ sedemikian sehingga $y \neq 0$ dan $y \neq m_1$. Dengan argument yang sama $y \neq m_0$ dan $y \neq m_2$. Dengan demikian, $m_0 - m_1 - m_2 - x - m_0$ adalah sirkuit dengan panjang 4, hal ini kontradiksi. Maka haruslah, gr$\big(\Gamma(M)\big) \leq 4$. ■

Teorema 1.10. *Misalkan M adalah R-modul perkalian. Maka terdapat simpul dari $\Gamma(M)$ yang bertetangga ke semua simpul lainnya jika dan hanya jika salah satu $M = M_1 \oplus M_2$ adalah R-modul, dimana M_1 dan M_2 adalah submodule dari M sedemikian sehingga M_1 hanya memiliki dua elemen, M_2 adalah generator berhingga dengan $T(M) = \{(x, 0), (0, m_2) : x \in M_1, m_2 \in M_2\}$, atau $T(M) = IM$, dimana I adalah ideal annihilator dari R (dan karenanya jika $T(M) \neq M$, maka $T(M)$ adalah submodule prima).*

Bukti. ($\Longrightarrow$) Misalkan $T(M) \neq M$ untuk semua I ideal annihilator dari R dan misalkan $x \in T(M)^*$ bertetangga ke setiap simpul. Sehingga $T(M) \neq \mathrm{Ann}(x)M$, kita memiliki $x \notin$ Ann(x)M. Kita bagi pembuktian theorem menjadi 6 klaim, dengan keperluannya sendiri.

Klaim 1: $N =$ Ann $(x)M$ adalah submodule prima dari M. Ini jelas bahwa $N \neq M$, misal $rm \in N$ dan $m \notin N$ untuk elemen tak nol $m \in M, r \in R$, dengan demikian, $r[m: M][x: M]M = 0$, maka $rkx = 0$ untuk setiap $k \in [m: M]$, karenanya $r \in$ Ann(kx). Tapi terdapat $k \in [m: M]$ sedemikian sehingga $kx \in T(M)^*$, sehingga Ann$(kx)M \subseteq$ Ann$(x)M$. Dengan demikian$rM \subseteq N$ dan $r \in [N: M]$. Dengan demikian, N adalah submodule prima dan mengakibatkan $[N: M]$ ideal prima.

Klaim 2: $[x: M]M = [x: M]^2M$. Jika $[x: M]M \neq [x: M]^2M$, maka $x \notin [x: M]^2M$, sehingga $x \notin \alpha x$ untuk setiap $\alpha \in [x: M]$. Karena $\alpha x = 0$ atau $\alpha x \in T(M)^*$ dan $[\alpha x: M][x: M]M = 0$, karenanya $\alpha^3 M = 0$, untuk $\alpha^3 \in$ Ann(x). Karena N adalah submodule prima, $\alpha M \subseteq N$, sehingga $x \in N$. Hal ini kontradiksi, maka haruslah $[x: M]M = [x: M]^2M$.

Klaim 3: $M = Rx \oplus$ Ann$(x)M$. Karena $[x: M]M = [x: M]^2M$, kita memiliki $Rx = [x: M]x$. Kiat ketahui bahwa Rx adalah pencoretan lemah R-modul dan sehingga $R = [x: M] +$ Ann(x). Hasil cek sederhana $M = Rx \oplus$ Ann$(x)M$. Karenanya kita dapat asumsikan $M = Rx \oplus M_2$ dengan $(x, 0)$ bertetangga ke setiap simpul lainnya.

Klaim 4: $Rx = \{0, x\}$. Misalkan $c \in Rx$, maka $(c, 0) \in T(M)^*$ dan $[(c, 0): M][(x, 0): M]M = 0$ dan karenanya $[(c, 0): M]x = 0$, sehingga $c = 0$.

Klaim 5: M_2 adalah generator berhingga. Kita klaim bahwa $D(M_2) \neq 0$, maka terdapat $0 \neq m_2 \in M_2$, sedemikian sehingga

$$[m_2: M_2][m'_2: M_2]M_2 = 0.$$

Untuk suatu $0 \neq m'_2 \in M_2$. Dengan demikian, $(x, m'_2) \in T(M)^*$ bertetangga dengan $(x, 0)$, sehingga $x = 0$. Hal ini kontradiksi. Mengakibatkan $D(M_2) = 0$. Misal $st \in$ Ann(M_2) untuk $s, t \in R$. Jadi $stM_2 = 0$ karenanya

$$[sM_2: M_2][tM_2: M_2]M_2 = 0$$

Karena $D(M_2) = 0$ kita mempunyai $sM_2 = tM_2 = 0$. Dengan demikian, Ann(M_2) adalah idela prima dari R. Karenanya M_2 adalah $\frac{R}{Ann(M_2)}$-modul dan $\frac{R}{Ann(M_2)}$ adalah daerah integral dan berdasarkan [1], M_2merupakan generator berhingga $\frac{R}{Ann(M_2)}$-modul, dan sehingga M_2 adalah generator berhingga R-modul.

Klaim 6: M adalah modul setia. Sekarang misalkan bahwa $0 \neq r \in$ Ann$(x) \cap$ Ann(m_2) untuk suatu $m_2 \in M_2$, karenanya $[(x, 0): M][(x, m_2): M]M = 0$ dan $[x: M]^2M = 0$. Hal ini kontradiksi. Karenanya Ann$(x) \cap$ Ann$(M_2) = 0$. Sehingga M adalah modul setia dan $T(M) = \{(x, 0), (0, m_2): x \in M_1, m_2 \in M_2\}$.

($\Leftarrow$) jika $M = M_1 \oplus M_2$, dimana M_1 hanya memiliki dua elemen $\{0, x\}$ dan $T(M) = \{(x, 0), (0, m_2): m_2 \in M_2\}$, maka $(x, 0)$ bertetangga dengan semua simpul lainnya. Jika $T(M) =$ Ann$(x)M$ untu suatu $0 \neq x \in M$, maka x bertetangga ke semua simpul lainnya.

Jika R tereduksi, M adalah R-modul perkalian setia dan $\Gamma(M)$ memiliki sebuah simpul yang bertetangga ke semua simpul lainnya, maka Mharus meliki pembentuk $M = M_1 \oplus M_2$ dimana M_1 hanya memiliki dua elemen dan M_2 merupakan generator berhingga.

Misalkan Spec$(M) = \{N < M: N$ adalah submodule prima$\}$ dan Max$(M) = \{H < M: H$ adalah submodule maximal$\}$, berdasarkan [11], untuk suatu M adalah R-modul perkalian, $H \in$ Max(M) jika dan hanya jika $M \neq H = QM$ untuk suatu ideal maximal Q dari R. ■

Akibat 1.11. *Misalkan M adalah R-modul perkalian berhingga. Maka terdapat simpul dari $\Gamma(M)$ yang bertetangga ke setiap simpul lainnya jika dan hanya jika salah satu dari $M = M_1 \oplus M_2$ adalah R-modul setia, dimana M_1, M_2 adalah submodule dari M sedemikian sehingga M_1 hanya memiliki dua elemen dan M_2 sederhana, atay R adalah local gelanggang (dan karenanya).*

Bukti. $(\Longrightarrow)$ Misalkan M adalah R-modul perkalian. Berdasarkan Theorema 2.9, salah satu $M = M_1 \oplus M_2$ atau $T(M) = IM$ dimana I adalah ideal annihilator dari R. Misalkan $M = M_1 \oplus M_2$, jadi M_2 berhingga, karenanya M_2 adalah R-modul artinian, juga berdasarkan [11], M_2 memuat sirkuit, sehingga $M_2 \cong \frac{R}{Ann(M_2)}$. Sama dengan pembuktian Theorema 2.9, Ann(M_2) adalah ideal prima. Dengan demikian, $\frac{R}{Ann(M_2)}$ daerah integral berhingga dan juga lapangan dan sehingga Ann(M_2) adalah ideal maximal dari R. Dengan demikian, M_2 adalah R-modul sederhana. Sekaramg asumsikan $M \neq M_1 \oplus M_2$. Berdasarkan Theorema 2.9, $T(M) =$ Ann$(x)M$ untuk suatu $x \in M$. Misalkan $M = \{m_1, m_2, \dots, m_n\}$, sehingga M adalah R-modul perkalian Artinian dan berdasarkan [11,cpro;;ary 2.9], M memuar sirkuit, dengan demikian, $M = Ry$ untuk suatu $y \in M$. Misalkan $s \in R$ adalah bukan elemen satuan. Dan $sM = \{sm_1, sm_2, \dots, sm_n\}$. Jika $sm_i = sm_j$ untuk suatu $i \neq j$, maka $s \in$ Ann$(m_1 - m_2)$, tetapi $m_i - m_j \in M = Ry$ dan terdapat $0 \neq t \in R$ sedemikian sehingga $sty = 0$, karenanya $sy \in T(M)$. Jika $sm_i \neq sm_j$ untuk setiap $i \neq j$, maka $sM = M$, sehingga $Rsy = Ry$. Karenanya $sy \in T(M) =$ Ann$(x)M$. Kita tau $s \in$ Ann(x) karena Ry adalah R-modul pencoretan lemah. Berdasarkan [5], R adalah gelanggang local dengan ideal maximal hanya Ann(x) sehingga $|$Max$(M)| = 1$.

$(\Longleftarrow)$ Misalkan R adalah gelanggang local. $M = Ry$ untuk suatu $y \in M$ dan $s \in R$ bukan merupakan elemen satuan. Dengan argument yang sama $sy \in T(M)$, karenanya $Z(M) =$ Ann(x) untuk suatu $x \in M$. Oleh karena itu, Ann$(x)M = T(M)$. Hal ini mengakibatkan, berdasarkan theorem 2.9, terdapat simpul dari $\Gamma(M)$ yang bertetangga ke semua simpul lainnya.

Misalkan M adalah R-modul perkalian, kita selanjutnya menentukan kapan $\Gamma(M)$ merupakan graf lengkap (untuk dua simpul bertetangga bertetangga). Berdasarkan definisi, $\Gamma(M)$ merupakan graf lengkap jika dan hanya jika $[x: M][y: M]M = 0$ untuk setiap elemen berbeda $x, y \in T(M)^*$. Kecuali untuk kasus ketika $M = M_1 \oplus M_2$, dengan M_1, M_2 hanya memiliki dua elemen, pembuktian theorem berikutnya menunjukan bahwa kita juga harus memiliki $[x: M]^2 M = 0$ untuk semua $x \in T(M)$, ketika $\Gamma(M)$ lengkap. Kecuali untuk kasus, Nill(M) terdeteksi oleh graf lengkap, karena $T(M) = Nil(M)$.

Teorema 1.12. Misalkan M adalah R-modul perkalian. Maka $\Gamma(M)$ lengkap jika dan hanya jika, salah satu $M = M_1 \oplus M_2$ setia, dengan M_1 adalah submodule, M_2 hanya memiliki dua elemen, atau $[x: M][y: M]M = 0$ setiap elemen berbeda $x, y \in T(M)$.

Bukti. $(\Longleftarrow)$ berdasarkan definisi.

($\Longrightarrow$) Misalkan bahwa $\Gamma(M)$ terhubung, tapi asumsikan bahwa $x \in T(M)$ dengan $[x: M]^2 M \neq 0$, sehingga $x \notin \mathrm{Ann}(x)M$ dan berdasarkan Theorema 2.9, $M = M_1 \oplus M_2$ dimana M_1hanya memiliki dua eleman. Sama dengan pembuktian dari Theorema 2.9, $[(0, y): M]^2 M = [(0, y): M]M$ untuk semua $y \in T(M)$. Karenanya,

$$Ry \subseteq [(0, y): M]y \subseteq (Ann(M_1) \cap [y: M_2])y \subseteq [y: M_2]y.$$

Karenanya $Ry = [y: M_2]y$ dan $y = sy$ untuk suatu $s \in [y: M_2]$. Misalkan $m_2 \in M_2$, sehingga $[y: M_2][(1 - s)m_2: M_2]M_2 = 0$ dan sama dengan pembuktian dari Theorema 2.9, $\mathrm{D}(M_2) = 0$, dengan demikian $y = 0$ atau $m_2 = sm_2 \in Ry$. Karenanya $M_2 = Ry$. Disisi lain, $(0, m_2) \in T(M)$ untuk semua $y \neq m_2 \in M_2$ dan $[(0, m_2): M][(0, y): M]M = 0$. Karenanya, $m_2 = 0$ dan Ry hanya memiliki dua elemen. ■

Akibat 2.12. *Misalnya M merupakan R-modul perkalian berhingga. Jika $\Gamma(M)$ lengkap, maka salah satu $M = M_1 \oplus M_2$, dimana M_1, M_2 merupakan submodule dari M sedemikian sehingga M_1, M_2 hanya memiliki dua elemen atau R merupakan gelanggang local (dan karenanya $|Max(M)| = 1$.).*

REFERENSI

[1] M.M. Ali, and D.J. Smith, 2001, Finite and infinite collections of multiplication modules, *Beiträage Algebra Geom*. 42 (2), 557-573.

[2] D.F. Anderson, A. Frazier, A. Lauve, and P.S. Livingston, 2001, The zero divisor graph of a commutative ring, II, in “Ideal Theoretic Methods in Commutative Algebra” (Columbia, MO, 1999), *Lecture Notes in Pure and Appl. Math.*, Marcel Dekker, New York, 220, 61-72

[3] D.F. Anderson, and P.S. Livingston, 1999, The zero-divisor graph of a commutative ring, *J. Algebra* 217 (2), 434-447.

[4] D.D. Anderson, M. Naseer, and Beck's, 1993, Coloring of a Commutative Rings, *J. Algebra* 159 (2), 500-514.

[5] M.F. Atiyah, and I.G. Macdonald, 1969, *Introduction to Commutative Algebra*, Addison$\hat{u}$Wesley, Reading, MA.

[6] A. Barnard, 1981, Multiplication modules, *J. Algebra* 71 (1), 174-178.

[7] I. Beck, 1988, Coloring of commutative rings, *J. Algebra* 116 (1), 208-226.

[8] A. Cannon, K. Neuerburg, and S.P. Redmond, 2005, *Zero-divisor graphs of near rings and semigroups*, in “Near rings and Nearelds” (A. Kreuzer, M.J.Thomsen, Eds.), Springer, Dordrecht, pp. 189-200.

[9] F.R. DeMeyer, T. McKenzie, and K. Schneider, 2002, The zero-divisor graph of a commutative semigroup, *Semigroup Forum* 65 (2), pp. 206-214.

[10] R. Diestel, 1997, *Graph Theory* Springer-Verlag, New York.

[11] Z.A. El-Bast, and P.F. Smith, 1988, Multiplication modules, *Comm. Algebra* 16 (4), 755-779.

[12] Sh. Ghalandarzadeh, and P. Malakooti Rad, 2009, Torsion graph over multiplication modules, *Extracta Math*. 24 (3), pp. 281-299.

[13] I. Kaplansky, 1974, *Commutative Rings*, The University of Chicago Press, Chicago-London.

[14] S.P. Redmond, 2002, The zero-divisor graph of a non-commutative ring, Int. J. Commut. Rings 1, 203-211. (in “*Commutative Rings*”, Nova Sci. Publ., Hauppauge, NY, 2002, 39-47).