Jurnal "LOG!K@" , Jilid 7, No. 1, 2017, Hal. 52 - 60
ISSN 1978 – 8568

KOMBINASI PERSYARATAN KARUSH KUHN TUCKER DAN METODE *BRANCH AND BOUND* PADA PEMROGRAMAN KUADRATIK KONVEKS BILANGAN BULAT MURNI

Khoerunisa dan **Muhaza Liebenlito**
Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Syarif Hidayatullah Jakarta
Email: muhazaliebenlito@uinjkt.ac.id

Abstract: In this paper the authors examine a nonlinear optimization problem with the case of a convex quadratic programming pure integer. The initial process that must be done is to ensure that the objective function of the programming is convex. The search of optimal solution in the case of pure integer quadratic requires linearization process into the linear complementary problems with requirements Karush Kuhn Tucker. After that, the process of finding the optimal solution with modified simplex method. In the case of integer quadratic programming all integer solutions should be shaped. Therefore, the process is continued with Branch and Bound method to find all integer solutions.
Keywords: *Nonlinear Programming, Convex Quadratic Programming, Integer Programming, KKT condition, Branch and Bound*.

Abstrak: Pada penelitian ini penulis meneliti masalah optimasi tak linear dengan kasus pemrograman kuadratik konveks bilangan bulat murni. Proses awal yang harus dilakukan adalah memastikan bahwa fungsi tujuan dari pemrograman tersebut konveks. Pencarian solusi optimal bilangan bulat murni pada kasus kuadratik membutuhkan proses linierisasi menjadi permasalahan komplementer linear dengan persyaratan Karush Kuhn Tucker. Setelah itu, dilakukan proses pencarian solusi optimal dengan metode modifikasi simpleks. Pada kasus pemrograman kuadratik bilangan bulat semua solusi harus berbentuk bilangan bulat. Oleh karena itu, proses dilanjutkan dengan metode *Branch and Bound* sampai ditemukan semua solusi bilangan bulat.
Kata kunci: *Pemrograman tak linear, Pemrograman kuadratik konveks, pemrograman bilangan bulat, Persyaratan KKT, metode Branch and Bound*.

PENDAHULUAN

Seiring dengan semakin kompleksnya permasalahan yang ada, maka penggunaan model linear tidak selalu cocok, sehingga sebagai alternatifnya digunakan model tak linear. Beberapa permasalahan dalam bidang ekonomi, industri, teknik dan bidang-bidang lainya dapat dinyatakan dalam bentuk pemrograman tak linear. Suatu permasalahan optimasi dikatakan tak linear jika fungsi tujuan dan kendala salah satu atau keduanya memiliki bentuk tak linear [6]. Contohnya adalah pemrograman kuadratik. Metode yang efektif untuk melinierisasikan pemrograman kuadratik menjadi masalah komplementer adalah persyaratan Karush Kuhn Tucker.Persyaratan Karush Kuhn Tucker menjadi syarat perlu untuk mendapatkan jaminan adanya solusi global optimal bagi pemecahan semua permasalahan optimasi tak linear dan menjadi syarat kecukupan bagi penyelesaian permasalahan pemrograman kuadratik [5]. Kemudian, pencarian solusi optimal pada masalah komplementer digunakan metode modifikasi simpleks karena pada permasalahan mengandung kendala komplementer yang harus terpenuhi.

Pure Integer Non Linear Programming merupakan permasalahan optimasi tak linear dimana semua variabel keputusannya harus bilangan bulat [2]. Sebagian besar algoritma-algoritma yang dapat menyelesaikan pemrograman bilangan bulat sedapat mungkin memasukan metode simpleks pada proses awal dengan menghilangkan batasan bilangan bulat. Pemrograman bilangan bulat pada umumnya lebih sulit diselesaikan dari pada pemrograman linear, maka terkadang terdapat kecenderungan untuk langsung membulatkan solusi bilangan real. Namun, hal itu tidak menjamin bahwa solusi hasil pembulatan adalah solusi optimal bilangan bulat. *Branch and Bound* adalah salah satu metode yang telah digunakan dengan baik untuk menyelesaikan bermacam masalah dalam bidang riset operasi dan masalah pemrograman bilangan bulat[2]. Adapun pembahasan dimulai dengan penjelasan definisi persyaratan Karush Kuhn Tucker, metode modifikasi simpleks, pemrograman kuadratik konveks, dan metode *Branch and Bound.* Kemudian akan diberikan contoh kasus pemrograman kuadratik konveks bilangan bulat murni.

PEMROGRAMAN KUADRATIK KONVEKS BILANGAN BULAT MURNI

Bentuk umum pemrograman kuadratik konveks bilangan bulat murni

$$min: f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} h_{ij} x_j x_i.$$

kendala $g_i(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i,$

$x_j \geq 0$ dan integer , $i = 1,2, \dots, m \; dan \; j = 1,2, \dots, n,$

dengan $f(\mathbf{x})$ adalah fungsi tujuan yang berbentuk konveks. Semua variabel keputusan terbatas pada bilangan bulat. Kendala dalam bentuk $g_i(\mathbf{x}) \geq b_i$ maka harus ditulis sebagai $-g_i(\mathbf{x}) \leq -b_i$. Kendala dalam bentuk $g_i(\mathbf{x}) = b_i$ harus diganti dengan $g_i(\mathbf{x}) \leq b_i$ dan $-g_i(\mathbf{x}) \leq -b_i$ [1].

1. Konveksitas Fungsi

Definisi 1. Himpunan konveks adalah kumpulan titik-titik dimana untuk setiap pasangan titik dalam kumpulan tersebut, seluruh segmen garis yang menggabungkan kedua titik juga berada dalam kumpulan tersebut [3].

1.1. Fungsi Konveks dan Konkaf untuk Satu Variabel

Definisi 2. Fungsi peubah tunggal $f(x)$ adalah fungsi konveks jika dan hanya jika setiap pasangan nilai **x**, misal x' dan x'' dengan $x'<x''$, maka

$$f[\lambda x'' + (1-\lambda)x'] \leq \lambda f(x'') + (1-\lambda)f(x')$$

dimana $0 < \lambda < 1$.Fungsi ini disebut fungsi konveks sempurna jika tanda ($\leq$) dapat diganti dengan ($<$) [3].

Misalkan suatu grafik dengan fungsi $f(x)$, maka $[x', f(x')]$ dan $[x'', f(x'')]$ adalah dua titik pada grafik $f(x)$ dengan $[\lambda x'' + (1-\lambda)x', \lambda f(x'') + (1-\lambda)f(x')]$ menunjukan sembarang titik pada segmen garis antara kedua titik tersebut dengan $0 < \lambda < 1$. Tanda pertidaksamaan pada definisi (2.2) dan (2.3) menunjukan bahwa segmen garis berada seluruhnya di atas atau di bawah grafik $f(x)$. Jika segmen garis berada di atas atau pada grafik $f(x)$ maka fungsi konveks. Namun, jika segmen garis berada di bawah atau pada grafik $f(x)$ maka fungsi konkaf.

Pada fungsi satu variabel untuk menguji fungsi konveks atau konkaf bisa digunakan uji turunan pertama dan kedua. Penggunaan uji turunan pertama pada fungsi satu variabel berdasarkan teorema 2.1 sebagai berikut:

Teorema 1. Jika $f(x)$ didefinisikan pada himpunan konveks dan $f(x)$ terdiferensialkan di x,maka $f(x)$adalah konveks jika dan hanya jika berlaku:

$$f(x) \geq f(y)(x-y)^{\mathrm{T}}\nabla f(y).$$

Untuk setiap titik $x, y \in S$.

1.2. Fungsi Konveks dan Konkaf Beberapa Variabel

Konsep fungsi konveks dan konkaf pada fungsi satu variabel dapat digeneralisasikan untuk fungsi yang lebih dari satu variabel. Fungsi $f(x)$ digantikan dengan $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ maka definisi (2.2) masih berlaku untuk $(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Interpretasi geometri masih berlaku terhadap titik dan segmen garis. titik dalam untuk ruang dimensi 2 adalah (x_1, x_2) dengan menganggap $m = n + 1$ titik dalam ruang dimensi-m adalah $(x_1, x_2, \dots, x_m)$[4]. Titik pada segmen garis untuk ruang dimensi- m merupakan bentuk umum dari ruang dimensi 2 sesuai dengan definisi 2.3 [3].

Definisi 3. Segmen garis yang menggabungkan dua titik sembarang $(x_1', x_2', \dots, x_n')$ dan $(x_1'', x_2'', \dots, x_n'')$ adalah himpunan titik-titik dimana

$$(x_1, x_2, \dots, x_m) = [\lambda x_1'' + (1-\lambda)x_1', \lambda x_2'' + (1-\lambda)x_2', \dots, \lambda x_m'' + (1-\lambda)x_m']$$

untuk $0 < \lambda < 1$.

Dalam terminologi matematika, $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ adalah konveks jika dan hanya jika matriks *Hessian* adalah semidefinit positif untuk semua **x** [4]. Namun, turunan parsial kedua dapat digunakan juga untuk memeriksa konveksitas fungsi beberapa variabel. Berikut uji konveksitas untuk fungsi dua variabel pada tabel 1.

Tabel 1. Uji konveksitas untuk fungsi dua variabel

	kuantitas	konveks	Konveks sempurna	konkaf	Konkaf sempurna
1	$\frac{\partial^2 f(x_1,x_2)}{\partial x_1^2} \cdot \frac{\partial^2 f(x_1,x_2)}{\partial x_2^2} - \left[\frac{\partial^2 f(x_1,x_2)}{\partial x_1 \partial x_2}\right]^2$	≥ 0	> 0	≥ 0	> 0
2	$\frac{\partial^2 f(x_1,x_2)}{\partial x_1^2}$	≥ 0	> 0	≤ 0	< 0
3	$\frac{\partial^2 f(x_1,x_2)}{\partial x_2^2}$	≥ 0	> 0	≤ 0	< 0

2. Persyaratan Karush Kuhn Tucker

Pemrograman kuadratik merupakan masalah umum dengan adanya kendala sehingga syarat perlu untuk mendapatkan solusi optimal global dengan harus memenuhi semua syarat

Karush Kuhn Tucker dan sebagai syarat cukupnya fungsi tujuan dan kendala dari permasalahan tersebut harus berbentuk konveks. Semua kendala persoalan tak linear harus dalam bentuk $g_i(\mathbf{x}) \leq b_i$ (jika ada).

Teorema 2. (Karush Kuhn Tucker):
Diasumsikan $f(\mathbf{x}), g_i(\mathbf{x})$ merupakan fungsi yang dapat diturunkan maka $\mathbf{x}^* = x_1', x_2', \ldots, x_n'$ menjadi solusi optimal untuk permasalahan pemrograman tak linear apabila terdapat sejumlah *m* bilangan $\lambda_1, \lambda_{2,\ldots,} \lambda_{m;}$ sehingga semua syarat KKT (1) - (6) terpenuhi [3].

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} \geq 0 \qquad (j = 1,2,\ldots,n) \tag{1}$$

$$x_j \left(\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} \right) = 0 \qquad (j = 1,2,\ldots,n) \tag{2}$$

$$g_i(\mathbf{x}) - b_i \geq 0 \qquad (i = 1,2,\ldots,m) \tag{3}$$

$$\lambda_i \ (g_i(\mathbf{x}) - b_i) = 0 \qquad (i = 1,2,\ldots,m) \tag{4}$$

$$x_j \geq 0 \qquad (j = 1,2,\ldots,n) \tag{5}$$

$$\lambda_i \geq 0 \qquad (i = 1,2,\ldots,m) \tag{6}$$

Skalar $\lambda_i, i = 1,2,..m$ disebut pengali *Lagrange*. Kondisi (4) disebut kondisi komplementer yang menyatakan dua kemungkinan yaitu:

Jika $g_i(\mathbf{x}) < 0$ maka $\lambda_i = 0$ atau Jika $\lambda_i < 0$ maka kendala $g_i(\mathbf{x}) = 0$.

Corollary 1. Diasumsikan bahwa $f(\mathbf{x})$ adalah fungsi konveks dan $g_i(\mathbf{x})$ fungsi konveks, dengan semua fungsi dapat diturunkan dan kontinu. Maka $\mathbf{x}^* = x_1', x_2', \ldots, x_n'$adalah solusi optimal jika dan hanya jika semua kondisi teorema1 terpenuhi [3].

Teorema 3. Suatu titik yang memenuhi kondisi (1) - (6) disebut titik KKT. Titik KKT dari pemrograman konveks adalah peminimalnya [4].

Langkah-langkah Linierisasi Persyaratan Karush Kuhn Tucker:

1. Menentukan turunan dari fungsi tujuan

   $$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}, \ldots, \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}, \ldots, \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}$$

2. Menentukan Persyaratan KKT

   Berdasarkan teorema 1 diperoleh persyaratan KKT sebagai berikut:

   (i) $\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} \geq 0 \qquad (j = 1,2,\ldots,n)$

   (ii) $x_j \left(\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} \right) = 0 \qquad (j = 1,2,\ldots,n)$

   (iii) $g_i(\mathbf{x}) - b_i \geq 0 \qquad (i = 1,2,\ldots,m)$

   (iv) $\lambda_i \ (g_i(\mathbf{x}) - b_i) = 0 \qquad (i = 1,2,\ldots,m)$

   (v) $x_j \geq 0 \qquad (j = 1,2,\ldots,n)$

   (vi) $\lambda_i \geq 0 \qquad (i = 1,2,\ldots,m)$

3. Menyatakan permasalahan dalam bentuk umum yaitusemua kendala persoalan tak linear harus dalam bentuk $g_i(\mathbf{x}) \leq b_i$.
4. Mengubah kondisi KKT yang berbentuk pertidaksamaan menjadi persamaan dengan menambah variabel *slack*.

   Untuk mengubah pertidaksamaan pada persyaratan KKT kondisi (i) dikurangkan dengan variabel *surplus* dan kondisi (iii) ditambahkan variabel *slack* sehingga menjadi persamaan dan konstanta dipindahkan ke sisi sebelah kanan. Variabel *slack* nonnegatif yang dilambangkan dengan $\mu_1, \mu_{2,\ldots,}\mu_j, s_i$

(i) $\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i(\mathbf{x})}{\partial x_1} - \mu_1 = 0 \leftrightarrow \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i(\mathbf{x})}{\partial x_1} = \mu_1$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} - \mu_j = 0 \leftrightarrow \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i(\mathbf{x})}{\partial x_1} = \mu_j$$

(iii) $g_i(\mathbf{x}) - b_i + s_i = 0$

5. Menentukan kendala komplementaritas
   Kendala komplementaritas diperoleh dengan mensubsitusikan hasil perhitungan 4 pada kondisi KKT yang berbentuk persamaan yaitu kondisi (ii) dan (iv).

   (ii) $x_1 \left(\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i(\mathbf{x})}{\partial x_1} \right) = 0 \leftrightarrow x_1 \mu_1 = 0,$

   $\vdots$

   $x_j \left(\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} \right) = 0 \leftrightarrow x_j \mu_j = 0,$

   (iv) $\lambda_i \ (g_i(\mathbf{x}) - b_i) = 0 \leftrightarrow \lambda_i \ s_i = 0,$

   Setiap pasang $(x_1\mu_1), \ldots, (x_j\mu_j)$ dan $(\lambda_i \ s_i)$ merupakan variabel komplementer karena hanya satu dari dua variabel tersebut yang dapat bernilai nol. Kendala komplementer tersebut digabung menjadi satu kendala yaitu:

$$x_1\mu_1 + \cdots + x_j\mu_j + \lambda_i \ s_i = 0.$$

6. Membentuk permasalahan komplementaritas dengan menambah variabel *artificial*.
   Permasalahan komplementaritas adalah meminimumkan nilai variabel *artificial* pada KKT. Tambahkan variabel *artificial* di ruas kiri pada persyaratan KKT yang memiliki bentuk variabel *slack* bertanda negatif. Variabel *artificial* yang ditambahkan yaitu $z_1, z_2, \ldots \ z_j$.

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i(\mathbf{x})}{\partial x_1} - \mu_1 + z_1 = 0,$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} - \mu_j + z_j = 0.$$

   Model kuadratik pada persamaan (3.11) telah ditransformasi menjadi model linear, sehingga fungsi tujuan yang akan diselesaikan dengan metode modifikasi simpleks yaitu:

$$\min \ Z = z_1 + z_2 + \cdots + z_j,$$

   dengan semua kendalanya yaitu:

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i(\mathbf{x})}{\partial x_1} - \mu_1 + z_1 = 0,$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} - \mu_j + z_j = 0,$$

$$g_i(\mathbf{x}) - b_i + s_i = 0,$$

$$x_j \geq 0, \lambda_i \geq 0,$$

$$x_1\mu_1 + \cdots + x_j\mu_j + \lambda_i \ s_i = 0.$$

3. Metode Modifikasi Simpleks

Setelah dilakukan linierisasi oleh persyaratan KKT maka di dapat bentuk kendala-kendala pemrograman linear. Pada model linear hasil dari linerisasi oleh KKT terdapat variabel *artificial* atau buatan dan kendala komplementer sehingga kita tidak dapat menggunakan metode simpleks biasa dalam mencari solusi yang optimal. Maka dari itu, perlu adanya modifikasi dari metode simpleks biasa untuk bisa memenuhi kendala yang ada. Metode modifikasi simpleks merupakan metode fase I dari metode dua fase. Hasil dari tahap metode modifikasi simpleks akan didapat solusi layak kontinu. Modifikasi dalam metode simpleks adalah perubahan pada prosedur memilih variabel basis yang akan menjadi varaibel masuk.Variabel non basis yang memiliki variabel komplementer berupa variabel basis tidak diikut sertakan menjadi calon variabel yang masuk. Pilihan harus diambil dari variabel non basis lain yang sesuai dengan kriteria biasa untuk metode simpleks hal ini dikenal dengan aturan masuk terbatas.

4. Metode *Branch and Bound*

Metode *Branch and Bound* (cabang dan batas) adalah salah satu metode untuk menghasilkan penyelesaian optimal pemrograman linear yang menghasilkan variabel-variabel keputusan bilangan bulat. Metode *Branch and bound* merupakan metode yang membagi permasalahan menjadi submasalah yang mengarah ke solusi (*branching*) dengan membentuk sebuah struktur pohon pencarian (*search tree*) dan melakukan pembatasan (*bounding*) untuk mencapai solusi optimal. Maka dari itu, dapat disimpulkan langkah utama dalam metode *Branch and Bound* adalah:

1. *Bounding*
   Masalah minimasi yang menjadi batas bawah adalah solusi dari modifikasi simpleks submasalah tersebut dan batas atasnya adalah Z^*. Begitu sebaliknya untuk kasus maksimasi.
2. *Branching* (Percabangan)
   Pada tahap *branching* percabangan dilakukan jika masih terdapat solusi yang belum bilangan bulat. Ciptakan dua cabang dengan batasan $\leq$ dan sebuah batasan $\geq$. Percabangan dilakukan dengan menambahkan pembatas pada masalah asli.
3. Penghentian
   Percabangan atau proses pencarian solusi pada suatu submasalah dihentikan jika memenuhi salah satu dari uji di bawah ini [3]:
   a. Uji 1: Kasus maksimasi, solusi dari modifikasi simpleks$\leq Z^*$, dan kasus minimasi, solusi dari modifikasi simpleks $\geq Z^*$,
   b. Uji 2: Solusi dari modifikasi simpleks tidak mempunyai penyelesaian layak,
   c. Uji 3: Semua variabel keputusan yang harus bernilai integer sudah bernilai integer.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Contoh pemrograman kuadratik sebagai berikut:

$$min\ f(x_1, x_2) = {x_1}^2 + {x_2}^2 - 9x_1 - 6x_2 + 20$$

kendala $\quad x_1 + 3x_2 \leq 10\ , \quad x_1, x_2 \geq 0$ dan integer (7)

Relaksasi permasalahan di atas menjadi pemrograman kuadratik biasa tanpa ada batasan bilangan bulat pada variabel keputusan.

$$min\ f(x_1, x_2) = {x_1}^2 + {x_2}^2 - 9x_1 - 6x_2 + 20,$$

kendala $$x_1 + 3x_2 \leq 10, \quad x_1, x_2 \geq 0.$$

Sebelum dilanjutkan ke proses linierisasi pastikan terlebih dahulu bahwa $f(x_1, x_2)$ adalah fungsi konveks. Secara umum fungsi dikatakan konveks jika matriks *Hessian* bersifat semidefinit positif. Namun, karena pada contoh (7) hanya menggunakan dua variabel bebas maka untuk membuktikan $f(x_1, x_2)$ konveks dapat langsung menggunakan uji konveksitas turunan kedua.

1. $\frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{x}_1^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{x}_2^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{x}_1 \partial \mathbf{x}_2}\right)^2 = 4 > 0$
2. $\frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{x}_1^2} = 2 > 0$
3. $\frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{x}_2^2} = 2 > 0$

Karena syarat (1)-(3) semuanya bernilai positif maka berdasarkan uji konveksitas turunan kedua ,fungsi $f(x_1, x_2)$ adalah konveks sempurna.

Kemudian, permasalahan di atas dilinierisasi menjadi masalah komplementer linier dengan persyaratan Karush Kuhn Tucker yang selanjutnya akan diselesaikan dengan metode modifikasi simpleks.

$$\min\ Z = z_1 + z_2$$

kendalanya yaitu:

$$2x_1 + \lambda_1 - \mu_1 + z_1 = 9,$$
$$2x_2 + 3\lambda_1 - \mu_2 + z_2 = 6,$$
$$x_1 + 3x_2 + s_1 = 10,$$
$$x_1\mu_1 + x_2\mu_2 + \lambda_1 s_1 = 0,$$
$$x_1, x_2 \geq 0 \text{ dan integer}, \ \lambda_1 \geq 0.$$

Menghasilkan solusi $x_1 = 4{,}15$, $x_2 = 1{,}95$, $L_1 = \lambda_1 = 0{,}7$, $Z = -8{,}025$ dimana variabel yang lain $\mu_1 = \mu_2 = s_1 = 0$.

Tabel 2. Modifikasi Simpleks

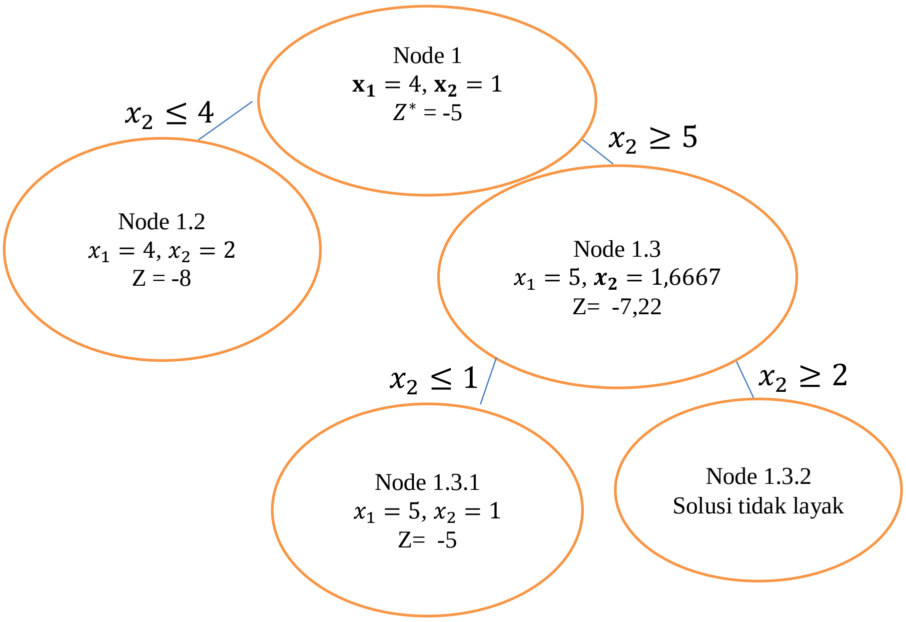
VB	x1	x2	L1	M1	M2	S1	z1	z2	NK
Z	0	0	0	0	0	0	-1	-1	0
x1	1	0	0	-0,45	0,15	0,1	0,45	-0,15	4,15
L1	0	0	1	-0,1	-0,3	-0,2	0,1	0,3	0,7
x2	0	1	0	0,15	-0,05	0,3	-0,15	0,05	1,95

Solusi layak dan optimal memiliki nilai yang bukan bilangan bulat untuk variabel yang diharuskan bilangan bulat. Maka dari itu, masalah akan dicabangkan pada salah satu variabel yang bukan bilangan bulat. Karena semua variabel yang harus bilangan bulat belum bilangan bulat maka secara sembarang dipilih variabel untuk dicabangkan.

Percabangan x_1

Pencabangan variabel x_1 diperlihatkan pada Gambar 1. Gambar 1 menyatakan hasil solusi persoalan modifikasi simpleks sebagai batas bawah. Kemudian pembulatan ke bawah $x_1 = 4{,}15 \approx 4$ dan $x_2 = 1{,}95 \approx 1$ dengan $f(x_1, x_2) = Z^* = -5$ sebagai batas atas sekaligus solusi terbaik bilangan bulat sementara. Kemudian $\mathbf{x_1}$dicabangkan menjadi 2 yaitu node 1.2 dengan tambahan kendala $x_1 \leq 4$ dan node 1.3 dengan tambahan kendala $x_1 \geq 5$.

Penyelesaian submasalah node 1.2 dan node 1.3 sama seperti menyelesaikan masalah awal dengan modifikasi simpleks. Hasil dari node 1.2 adalah $x_1 = 4$, $x_2 = 2$ dengan Z= -8 dan untuk node 1.3 adalah $x_1 = 5$, $x_2 = 1{,}6667$ dengan Z= -7,22. Karena pada node 1.3 masih ada variabel yang belum bilangan bulat maka dicabangkan $x_2 \leq 1$ dan $x_2 \geq 2$. Untuk tambahan kendala $x_2 \leq 1$ dihasilkan solusi $x_1 = 5$, $x_2 = 1$ dengan Z= -5 dan untuk tambahan $x_2 \geq 2$ dihasilkan tidak memilki penyelesaian yang layak karena tidak memenhi kendala pertama pada masalah asli.

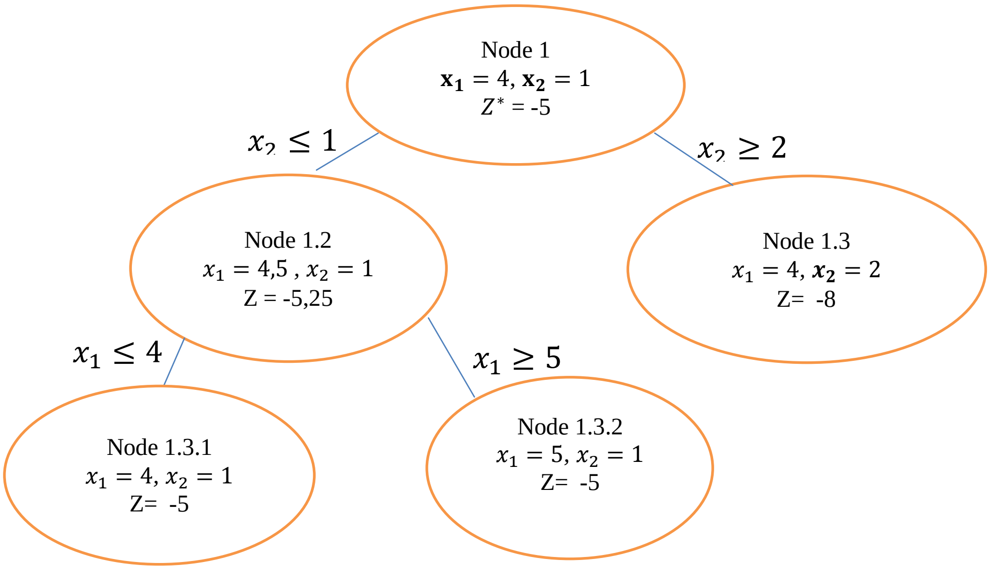


Gambar 1. Metode Branch and Bound Cabang x_1

Percabangan x_2

Pencabangan variabel x_2 diperlihatkan pada Gambar 2. Percabangan variabel x_2 diperoleh kendala baru yaitu pada node 1.2 ada tambahan kendala $x_2 \leq 1$ dan node 1.3 ada tambahan $x_2 \geq 2$. Hasil dari node 1.2 adalah $x_1 = 4{,}5$, $x_2 = 1$ dengan Z=-5,25 dan node 1.3 adalah $x_1 = 4$, $x_2 = 2$ dengan Z=-8. Karena pada node 1.2 masih ada variabel yang belum bulat maka dicabangkan kembali menjadi $x_1 \leq 4$ dan $x_1 \geq 5$. Solusi yang didapat untuk tambahan kendala $x_1 \leq 4$ adalah $x_1 = 4$, $x_2 = 1$ dengan Z=-5 dan untuk solusi $x_1 \geq 5$ adalah $x_1 = 5$, $x_2 = 1$ dengan Z=-5.

Dari hasil percabangan $\mathbf{x_1}$dan $\mathbf{x_2}$ diperoleh solusi optimal bilangan bulat untuk kasus minimum yaitu $x_1 = 4$, $\boldsymbol{x_2} = 2$, Z= -8, dengan nilai Z paling minimum.



Gambar 2. Metode Branch and Bound Cabang x_2

KESIMPULAN

Pada penelitian ini dibahas mengenai masalah optimasi tak linear pada kasus pemrograman kuadratik konveks bilangan bulat murni menggunakan metode kombinasi antara persyaratan Karush Kuhn Tucker dan metode *Branch and Bound* dengan studi kasus:

$$min f(x_1, x_2) = {x_1}^2 + {x_2}^2 - 9x_1 - 6x_2 + 20$$

kendala $\quad x_1 + 3x_2 \leq 10$

$$x_1, x_2 \geq 0 \text{ dan integer.}$$

Fungsi $f(x_1, x_2)$ memiliki dua variabel bebas. Pada proses pencarian solusi optimal bilangan bulat, langkah pertama adalah memastikan bahwa fungsi tujuannya berbentuk konveks. Langkah selanjutnya adalah linierisasi pemrograman kuadratik menjadi masalah komplementer linier menggunakan persyaratan Karush Kuhn Tucker. Setelah itu dilakukan pencarian solusi optimal menggunakan metode modifikasi simpleks. Solusi optimal yang diperoleh dari metode modifikasi simpleks adalah $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Untuk memperoleh solusi optimal dalam bilangan bulat atau integer, maka digunakan metode *Branch and Bound* dan diperoleh nilai $x_1 = 4$ dan $x_2 = 2$ sebagai solusi optimal bilangan bulat.

REFERENSI

[1] Hillier, F.S. 1994. *Pengantar Riset Operasi.* Jilid 1.Ed ke-5.Wahyarasmana, D. Erlangga. Jakarta

[2] Hillier, F.S. 2001. *Introduction to Operation Research.* Mc Graw-Hill. New York

[3] Nocedal, J., Wright, Stephen J. 1999. *Numerical Optimizatiion.* Springer-Verlag

[4] Tyasnurita, R., Anggraeni, W. dan Soelaiman, R. 2009. Optimasi Pemrograman Kuadratik Konveks dengan Menggunakan Metode Primal-Dual Path-Following. *Jurnal SISFO*. Fakultas Teknologi Informasi: Institut Teknologi Sepuluh November. Vol 1. No 2. Hal 28-32.

[5] Umami, A., Nababan, E. dan Sawaluddin. 2015. KKT Conditions and Branch and Bound Methods on Pure Integer Nonlinear Programming. *International Journal of Mathematical Analysis and Applications.* Department of Mathematics, University of Sumatera Utara, Medan, Indonesia. Vol 2 No 4. Hal 62-67.