

## BILANGAN TERHUBUNG PELANGI PADA GRAF HASIL AMALGAMASI GRAF PEMBAGI NOL ATAS RING KOMUTATIF $Z_3 \times Z_p$

**Budi Harianto**

Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi  
Universitas Islam Negeri Syarif Hidayatullah Jakarta  
Email: [uinjktbudi13@gmail.com](mailto:uinjktbudi13@gmail.com)

**Abstract:** Let  $R$  be a commutative ring and let  $Z(R)$  be its set of zero-divisors on  $R$ . We associate a (simple) graph  $\Gamma(R)$  to  $R$  with vertices  $Z(R)^* = Z(R) - \{0\}$ , the set of nonzero zero-divisors of  $R$ , and for distinct  $x, y \in Z(R)^*$ , the vertices  $x$  and  $y$  are adjacent if and only if  $xy = 0$ . Let  $G$  be a nontrivial connected graph on which is defined a coloring  $c : E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , of the edges of  $G$ , where adjacent edges may be colored the same. A path  $P$  in  $G$  is rainbow path if no two edges of  $P$  are colored the same. The graph  $G$  is rainbow connected if  $G$  contains a rainbow  $u - v$  path for every two vertices  $u$  and  $v$  of  $G$ . The minimum  $k$  for which there exists such a  $k$ -edge coloring is the rainbow connection number  $rc(G)$  of  $G$ . In this paper will discuss about rainbow connection number of zero-divisors graph on commutative ring  $Z_3 \times Z_p(\Gamma(R))$  and graph the results of the amalgamation of zero-divisors graph on commutative ring  $Z_3 \times Z_p(\Gamma(R)_n)$ , with  $rc(\Gamma(R)) = \min\{\lceil \sqrt{p-1} \rceil, 4\}$  and  $rc(\Gamma(R)_n) = \min\{\lceil \sqrt{p-1} \rceil n, 2n + 4\}$ .

**Keywords:** Rainbow Connection Number, Zero-Divisor Graph, Zero-Divisor Graph On Commutative Ring  $Z_3 \times Z_p$ , Amalgamation Graph Of Zero-Divisor Graph On Commutative Ring  $Z_3 \times Z_p$ , Rainbow Coloring.

**Abstrak:** Misalkan  $R$  adalah komutatif ring dan misalkan  $Z(R)$  himpunan pembagi nol atas  $R$ . Konstruksi sebuah graf (sederhana)  $\Gamma(R)$  atas  $R$  dengan titik-titiknya  $Z(R)^* = Z(R) - \{0\}$ , himpunan pembagi nol tak nol pada  $R$ , dan untuk  $x, y \in Z(R)^*$  yang berbeda, titik  $x$  dan  $y$  dikatakan bertetangga jika dan hanya jika  $xy = 0$ . Misalkan  $G$  adalah graf terhubung tak trivial yang didefinisikan sebuah pewarnaan  $c : E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , pada sisi-sisi di  $G$ , dimana sisi-sisi yang bertetangga boleh berwarna sama. Graf  $G$  adalah terhubung pelangi jika  $G$  memuat lintasan pelangi  $u - v$ , untuk setiap titik  $u$  dan  $v$  di  $G$ . Jika terdapat minimum  $k$  sedemikian sehingga  $G$  mempunyai pewarnaan- $k$  sisi, maka  $G$  mempunyai bilangan terhubung pelangi  $rc(G) = k$ . Pada paper ini, akan dibahas tentang bilangan terhubung pelangi pada graf pembagi nol atas ring komutatif  $Z_3 \times Z_p(\Gamma(R))$  dan graf hasil amalgamasi pada graf pembagi nol atas ring komutatif  $Z_3 \times Z_p(\Gamma(R)_n)$ , dengan  $rc(\Gamma(R)) = \min\{\lceil \sqrt{p-1} \rceil, 4\}$  dan  $rc(\Gamma(R)_n) = \min\{\lceil \sqrt{p-1} \rceil n, 2n + 4\}$ .

**Kata kunci:** Bilangan Terhubung Pelangi, Graf Pembagi Nol, Graf Pembagi Nol Atas Ring Komutatif  $Z_3 \times Z_p$ , Graf Amalgamasi Pada Graf Pembagi Nol Atas Ring Komutatif  $Z_3 \times Z_p$ , Pewarnaan Pelangi.

### PENDAHULUAN

Suatu graf  $G$  didefinisikan sebagai pasangan terurut himpunan  $(V(G), E(G))$  dengan  $V(G)$  adalah himpunan titik kosong yang terhingga dengan elemennya dinamakan titik (*vertex*) dan  $E(G)$  adalah himpunan sisi (*edge*) yang menghubungkan sepasang titik [2], sedangkan ring adalah suatu himpunan tak kosong yang memiliki sifat grup abelian terhadap

penjumlahan, tertutup dan asosiatif terhadap perkalian, serta bersifat distributif terhadap penjumlahan dan perkalian. Misalkan  $R$  adalah suatu ring komutatif, yaitu ring yang memiliki sifat komutatif terhadap perkalian, dan  $Z(R)$  adalah himpunan pembagi nol dari  $R$ . Suatu ring  $R$  memuat pembagi nol jika terdapat  $x, y \in R$  dimana  $x, y \neq 0$  sedemikian hingga  $x \cdot y = 0$ . Graf pembagi nol dari ring komutatif yang dinotasikan  $\Gamma(R)$  adalah suatu graf dengan simpul-simpulnya adalah semua elemen dari himpunan pembagi nol tak nol dari ring  $R$ , dimana  $x$  dan  $y$  dikatakan bertetangga jika dan hanya jika  $x \cdot y = 0$ , dengan  $x, y \in Z(R)$  [1].

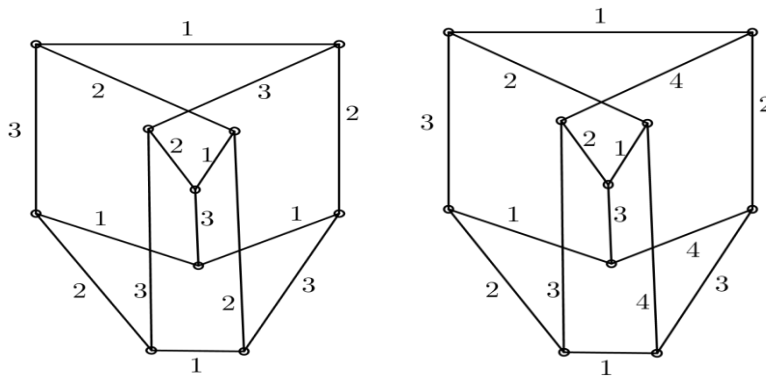
Konsep bilangan terhubung pelangi pada graf pertama kali diperkenalkan oleh Chartrand dkk, pada tahun 2006 [3]. Misalkan  $G = (V, E)$  adalah graf terhubung tak trivial. Didefinisikan fungsi pewarnaan  $c : E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}, n \in \mathbb{N}$ , dimana dua sisi yang bertetangga boleh memiliki warna yang sama. Suatu lintasan  $P$  adalah jalan yang semua titik berbeda. Misalkan terdapat dua titik  $u, v$  pada graf  $G$ . Suatu lintasan  $u - v$  di  $G$  dikatakan lintasan pelangi (*rainbow path*) jika tidak terdapat dua sisi di  $P$  yang memiliki warna sama. Fungsi pewarnaan  $c : E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}, k \in \mathbb{N}$ , dikatakan pewarnaan- $k$  pelangi pada  $G$ , jika untuk setiap pasang titik  $u$  dan  $v$  di  $V$  terdapat suatu lintasan dengan  $u$  dan  $v$  sebagai titik ujung yang setiap sisinya memperoleh warna berbeda. Suatu pewarnaan sisi di  $G$  dikatakan terhubung pelangi atau *rainbow connected* jika setiap dua titik yang berbeda dihubungkan oleh lintasan pelangi. Pewarnaan sisi yang menyebabkan  $G$  bersifat terhubung pelangi disebut pewarnaan pelangi atau *rainbow coloring*. Bilangan terhubung pelangi dari graf terhubung  $G$ , ditulis  $rc(G)$ , didefinisikan sebagai bilangan bulat positif  $k$  sehingga  $G$  mempunyai suatu pewarnaan- $k$  pelangi. Suatu pewarnaan pelangi yang menggunakan  $rc(G)$  warna dikatakan sebagai minimum pewarnaan pelangi [3]. Misalkan  $c$  adalah rainbow coloring dari graf terhubung  $G$ . Untuk dua titik  $u$  dan  $v$  di  $G$ , *rainbow  $u - v$  geodesic* pada  $G$  adalah suatu lintasan pelangi  $u - v$  yang panjangnya  $d(u, v)$ , dimana  $d(u, v)$  adalah jarak antara  $u$  dan  $v$  (panjang lintasan terpendek  $u - v$  di  $G$ ). Graf  $G$  dikatakan *strongly rainbow connected* jika  $G$  memiliki suatu *rainbow  $u - v$  geodesic* untuk setiap dua titik  $u$  dan  $v$  di  $G$ . Minimum  $k$  sehingga terdapat pewarnaan  $c : E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}, n \in \mathbb{N}$  sedemikian sehingga  $G$  adalah terhubung pelangi kuat dikatakan bilangan terhubung pelangi kuat graf  $G$ , dinotasikan dengan  $src(G)$ . Dari definisi, jelas bahwa  $rc(G) \leq src(G)$  untuk setiap graf terhubung  $G$ .

Pewarnaan pelangi digunakan antara lain untuk mengamankan kode rahasia yang dikirimkan antar pemerintah dan agen. Dalam hal ini, pemerintah dan agen tidak diizinkan untuk saling mencek informasi karena berhubungan dengan keamanan nasional, sehingga informasi kepada agen satu dan lainnya harus menggunakan sandi. Dengan demikian, akan terdapat satu atau lebih lintasan informasi untuk setiap dua agen dan harus dipastikan tidak ada sandi yang berulang. Kata sandi setiap lintasan harus berbeda, sehingga harus ditentukan jumlah sandi yang dibutuhkan, agar terdapat satu lintasan yang aman antara dua agen. Situasi inilah yang dimodelkan dalam bilangan terhubung pelangi. Selain itu, terhubung pelangi dimotivasi oleh interpretasi menarik di bidang jaringan. Misalkan  $G$  diinterpretasikan sebagai suatu jaringan misalnya, jaringan selular). Rute pesan antara dua titik penerima dengan syarat bahwa rute antara kedua titik atau dapat dilihat sebagai sisi pada *path*, diberikan suatu saluran yang berbeda (misalnya, frekuensi yang berbeda). Pada jaringan selular ini, jelas bahwa yang ingin diminimalkan adalah banyaknya saluran berbeda yang digunakan dalam jaringan. Bilangan minimal inilah yang disebut dengan bilangan terhubung pelangi (*rainbow connection number*)  $rc(G)$ .

Diameter graf, dinotasikan dengan  $diam(G)$ , merupakan maksimum dari himpunan jarak dua titik pada  $G$ . Untuk menemukan diameter dari suatu graf, harus ditentukan jarak dari setiap dua titik pada  $G$ , bilangan terbesarnya merupakan diameter dari graf tersebut. Hubungan  $diam(G)$ ,  $rc(G)$  dan banyak sisi  $m$  pada suatu graf terhubung  $G$  ditunjukkan oleh petidaksamaan berikut [3]:

$$diam(G) \leq rc(G) \leq m.$$

Untuk memahami konsep-konsep di atas, berikut akan diberikan ilustrasi tentang bilangan terhubung pelangi  $rc(G)$  pada graf Petersen  $G$  yang dapat dilihat pada gambar 1, dimana  $P$  mempunyai pewarnaan-3 pelangi. Jelas bahwa  $rc(G) \leq 3$ . Sekarang akan ditunjukkan bahwa  $rc(G) \geq 3$ . Jika  $u$  dan  $v$  adalah dua titik yang tidak bertetangga pada  $G$ , maka  $d(u, v) = 2$  ( $d(u, v)$  adalah jarak  $u$  ke  $v$ ) sehingga panjang lintasan  $u - v$  tidak lebih dari 2. Sehingga setiap pewarnaan pelangi pada  $G$  menggunakan setidaknya 2 warna. Jadi  $rc(G) \geq 2$ . Jika  $G$  mempunyai pewarnaan-2 pelangi  $c$ , maka terdapat dua sisi yang berdekatan  $G$  yang memiliki warna yang sama oleh  $c$ , misalkan sisi  $e_1 = uv$  dan  $e_2 = vw$  memiliki warna yang sama. karena ada tepat satu lintasan  $u - v$  dengan panjang 2 di  $P$ , sehingga tidak ada lintasan pelangi  $u - w$  pada  $G$ . Sehingga terjadi kontradiksi. Jadi,  $rc(G) \geq 3$ . Oleh karena itu,  $rc(G) = 3$ .



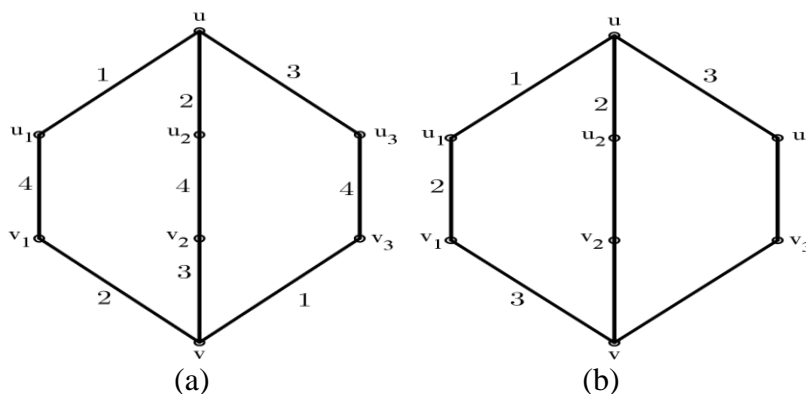
Gambar 1. Rainbow 3-coloring dan strong rainbow 4-coloring pada graf Peterson.

Karena  $rc(G) = 3$ , maka  $src(G) \geq 3$ . Selanjutnya, karena bilangan kromatik sisi pada graf Peterson adalah 4, setiap pewarnaan-3c pada sisi  $G$  dimana dua sisi yang bertetangga  $uv$  dan  $vw$  diberi warna yang sama. Karena  $u, v, w$  adalah satu-satunya lintasan geodesik  $u - w$  di  $P$ , maka pewarnaan  $c$  bukan pewarnaan pelangi kuat. Pewarnaan-4 pada sisi-sisi  $G$  ditunjukkan pada gambar 1 adalah pewarnaan pelangi kuat,  $src(G) = 4$ .

Sebagai contoh lain, graf  $G$  pada gambar 2(a), dimana pewarnaan-4 pelangi  $c$  pada  $G$  juga ditunjukkan. Faktanya,  $c$  adalah pewarnaan pelangi minimum pada  $G$ , sehingga  $rc(G) = 4$ . Karena  $diam(G) \geq 3$ , maka  $rc(G) \geq 3$ . Asumsikan bahwa,  $rc(G) = 3$ . Maka terdapat pewarnaan-3 pelangi  $c'$  pada  $G$ . Karena setiap lintasan  $u - v$  di  $G$  mempunyai panjang 3, setidaknya satu dari tiga lintasan  $u - v$  adalah lintasan pelangi  $u - v$ , misalkan  $u, u_1, v_1, v$  adalah lintasan pelangi  $u - v$ . Misalkan  $c'(uu_1) = 1, c'(u_1v_1) = 2$ , dan  $c'(v_1v) = 3$ . (lihat gambar 2(b)).

Jika  $x$  dan  $y$  adalah dua titik pada  $G$  sedemikian sehingga  $d(x, y) = 2$ , maka  $G$  memuat tepat satu lintasan  $x - y$  dengan panjang 2, sedangkan lintasan  $x - y$  lainnya mempunyai panjang 4 atau lebih. Artinya, terdapat dua sisi yang bertetangga mempunyai warna yang

sama. Dengan demikian, tanpa mengurami perumuman, kita asumsikan bahwa  $c'(uu_2) = 2$  dan  $c'(uu_3) = 3$ . (lihat gambar 2(b).) sehingga  $\{c'(vv_2), c'(vv_3)\} = \{1,2\}$ . Jika  $c'(vv_2) = 1$  dan  $c'(vv_3) = 2$ , maka  $c'(u_2v_2) = 3$  dan  $c'(u_3v_3) = 1$ . Pada kasus ini, tidak ada lintasan pelangi  $u_1 - v_3$  di  $G$ . Sebaliknya, jika  $c'(vv_2) = 2$  dan  $c'(vv_3) = 1$ , maka  $c'(u_2v_2) \in \{1,3\}$  dan  $c'(u_3v_3) = 2$ . Jika  $c'(u_2v_2) = 1$ , maka tidak ada lintasan pelangi  $u_2 - v_3$  di  $G$ , jika  $c'(u_2v_2) = 3$ , maka tidak ada lintasan pelangi  $u_2 - v_1$  di  $G$ . Hal ini tidak mungkin terjadi. Jadi, kita klaim bahwa  $rc(G) = 4$ . Karena  $4 = rc(G) \leq src(G)$  untuk graf  $G$  pada gambar 2 dan pewarnaan-4 pada  $G$  di gambar 2(a) juga pewarnaan-4 pelangi kuat, maka  $src(G) = 4$ .



Gambar 2. Graf  $G$  dengan  $rc(G) = src(G) = 4$ .

Di bawah ini dituliskan beberapa hasil penelitian tentang bilangan terhubung pelangi.

**Teorema 1.** Misalkan  $G$  adalah graf terhubung taktrivial yang berukuran  $m$ , maka [3]

- $rc(G) = 1$  jika hanya jika  $G$  adalah graf lengkap,
- $rc(G) = 2$  jika hanya jika  $src(G) = 2$ , dan
- $rc(G) = m$  jika hanya jika  $G$  adalah graf pohon.

**Teorema 2.** Misalkan  $n$  adalah bilangan bulat dengan  $n \geq 4$ . Jika  $C_n$  adalah graf lingkaran berorde  $n$ , maka [3]

$$rc(C_n) = src(C_n) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil.$$

**Teorema 3.** Untuk  $n \geq 3$ , bilangan terhubung pelangi dan bilangan pewarnaan pelangi kuat pada graf roda  $W_n$  adalah [3]

$$a. rc(w_n) \begin{cases} 1 & \text{jika } n = 3, \\ 2 & \text{jika } 4 \leq n \leq 6, \\ 3 & \text{jika } n \geq 7. \end{cases}$$

$$b. src(w_n) = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil.$$

**Teorema 4.** Untuk bilangan bulat  $s$  dan  $t$  dimana  $1 \leq s \leq t$ , bilangan terhubung pelangi pada graf bipartit  $K_{s,t}$  adalah [3]

$$rc(K_{s,t}) = \min\{\lceil \sqrt[s]{t} \rceil, 4\}.$$

**Teorema 5.** Untuk bilangan bulat  $n \geq 3$ , graf kipas  $F_n$  berorde  $n + 1$ , memiliki bilangan terhubung pelangi [8]

$$rc(F_n) = \begin{cases} 2, & \text{jika } 3 \leq n \leq 6, \\ 3, & \text{jika } n \geq 7. \end{cases}$$

Caro, dkk [10], Schiermeyer [4], dan Chandran, dkk [9] menentukan bilangan terhubung pelangi terkait derajat minimum dari suatu graf. Krivelevich dan Yuster [7], serta Dong dan Li [5] menentukan bilangan terhubung pelangi terkait dengan orde dari  $G$ . Chartrand, dkk [3], seta Li dan Shi [6] menentukan bilangan terhubung pelangi terkait dengan konektivita dari graf.

Pada paper ini akan dibahas tentang bilangan terhubung pelangi pada graf pembagi nol atas ring komutatif  $Z_3 \times Z_p$  dan graf hasil amalgamasi graf pembagi nol atas ring komutatif  $Z_3 \times Z_p$ .

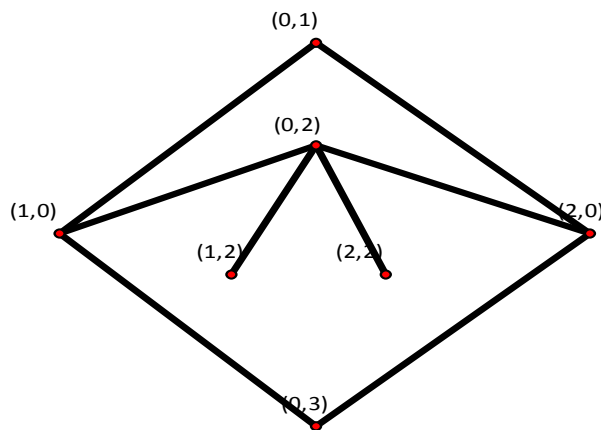
### DEFINISI DAN TERMINOLOGI

**Definisi 1.** Graf pembagi nol dari ring komutatif yang dinotasikan  $\Gamma(R)$  adalah suatu graf dengan simpul-simpulnya adalah semua elemen dari himpunan pembagi nol tak nol dari ring  $R$ , dimana  $x$  dan  $y$  dikatakan bertetangga jika dan hanya jika  $x \cdot y = 0$ , dengan  $x, y \in Z(R)^*$ ,  $Z(R)^*$  adalah himpunan pembagi nol tak nol dari  $R$ .

Contoh : Misalkan  $R \cong Z_3 \times Z_4$ . Himpunan pembagi nol dari  $R$  adalah

$$Z(R)^* = \{(0,1), (0,2), (0,3), (1,0), (1,2), (2,0), (2,2)\}.$$

Graf pembagi nol dari  $R$  ( $\Gamma(R)$ ) adalah:



**Gambar 3.** Graf  $\Gamma(R \cong Z_3 \times Z_4)$ .

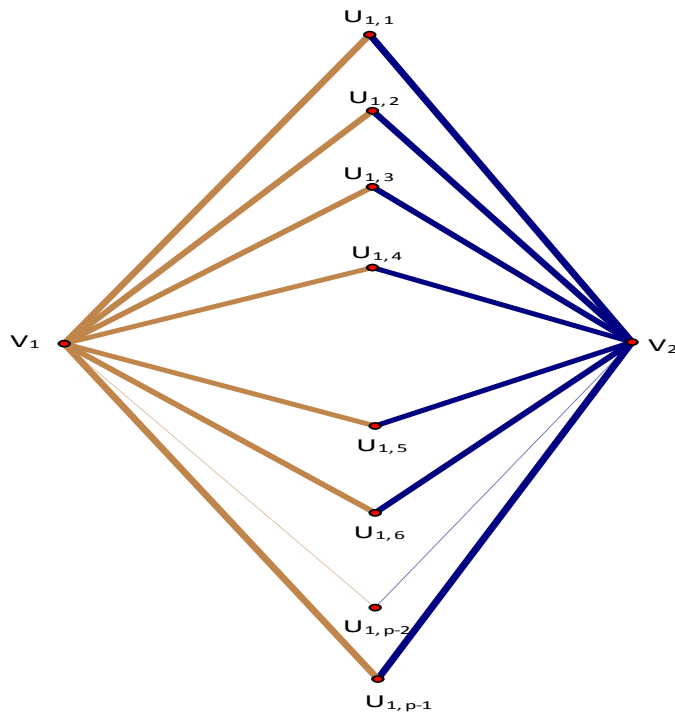
Berdasarkan definisi 1,  $(0,1)$  dan  $(0,3)$  akan bertetangga dengan  $(1,0)$  dan  $(2,0)$ , karena  $(0,1) \cdot (1,0) = (0,0)$ ,  $(0,1) \cdot (2,0) = (0,0)$ ,  $(0,3) \cdot (1,0) = (0,0)$  dan  $(0,3) \cdot (2,0) = (0,0)$ , sedangkan  $(0,2)$  akan bertetangga dengan  $(1,0)$ ,  $(1,2)$ ,  $(2,0)$  dan  $(2,2)$ , karena  $(0,2) \cdot (1,0) = (0,0)$ ,  $(0,2) \cdot (1,2) = (0,0)$ ,  $(0,2) \cdot (2,0) = (0,0)$  dan  $(0,2) \cdot (2,2) = (0,0)$ . (lihat gambar 3).

**Graf Pembagi Nol Atas Ring Komutatif  $R \cong Z_3 \times Z_p$**

**Definisi 2.** Misalkan ring  $R \cong Z_3 \times Z_p$  dengan  $p$  prima. Ring  $Z_3 \times Z_p$  adalah ring yang elemen-elemennya merupakan hasil perkalian luar antara  $Z_3$  dan  $Z_p$ , sehingga

$$Z_3 \times Z_p = \{(a, b) | a \in Z_3, b \in Z_p\}.$$

Karena untuk setiap  $b \in Z_p$ ,  $(0, b) \cdot (1, 0) = (0, 0)$  dan  $(0, b) \cdot (2, 0) = (0, 0)$ , maka jika  $0 \in Z_3$  dan  $b \in Z_p$  maka  $(0, b)$  akan bertetangga dengan  $(1, 0)$  dan  $(2, 0)$  untuk  $1, 2 \in Z_3$  dan  $0 \in Z_p$ . Sehingga berdasarkan definisi graf pembagi nol (definisi 1),  $\Gamma(R)$  akan berbentuk seperti gambar dibawah ini:



**Gambar 4.** Graf  $\Gamma(R \cong Z_3 \times Z_p)$ .

Dari gambar 4, graf  $\Gamma(R)$  isomorfik dengan graf bipartit  $K_{2,p-1}$ , dimana Graf  $\Gamma(R) = K_{2,p-1}$ . Sehingga berdasarkan teorema 4,

$$rc(\Gamma(R)) = rc(K_{2,p-1}) = \min\{\lceil \sqrt{p-1} \rceil, 4\}.$$

Untuk pelabelan setiap simpul pada graf  $\Gamma(R)$  di atas, kita dapat mengkonstruksi pelabelan simpul yaitu  $(0,1) \rightarrow u_1, (0,2) \rightarrow u_2, \dots, (0, p-1) \rightarrow u_{p-1}, (1,0) \rightarrow v_1$ , dan  $(2,0) \rightarrow v_2$ .

**Graf Hasil Amalgamasi dari Graf Pembagi Nol Atas Ring  $R \cong Z_3 \times Z_p$**

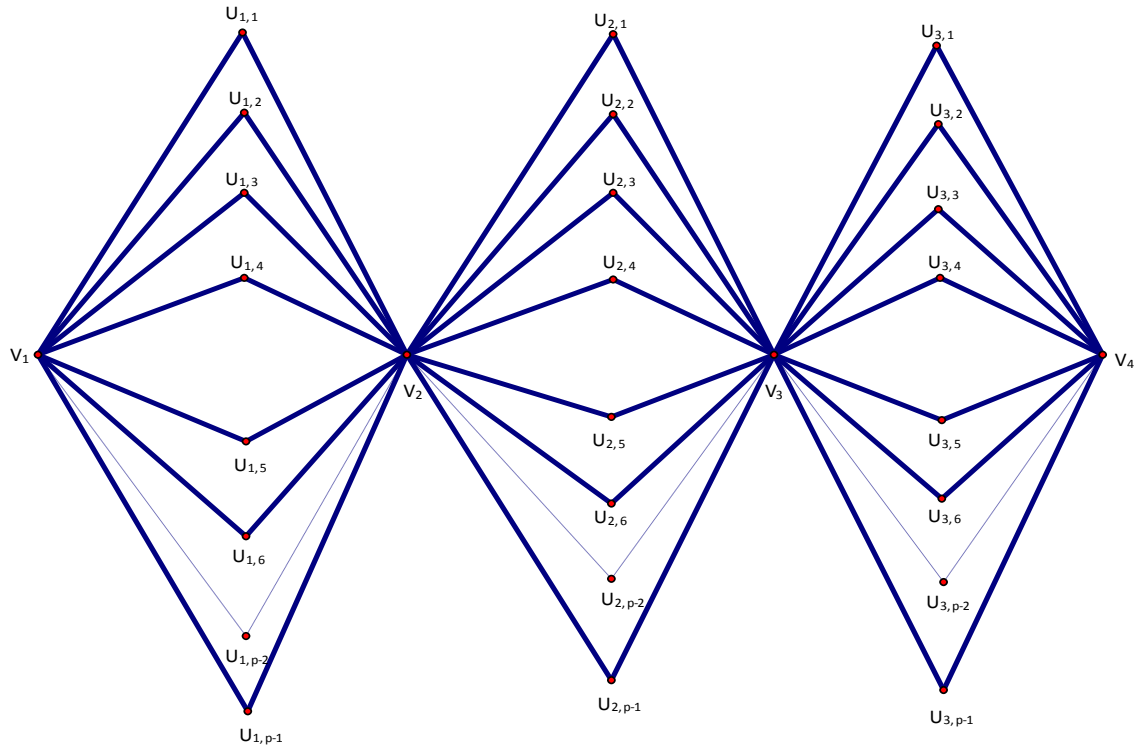
**Definisi 3.** Misalkan ring  $R \cong Z_3 \times Z_p$  dan  $\Gamma(R)$  adalah graf pembagi nol dari  $R$ . Graf  $G = (V, E)$  disebut graf hasil amalgamasi dari graf pembagi nol  $\Gamma(R)$ , dinotasikan dengan

$\Gamma(R)_n$ , jika  $G$  terdiri dari gabungan graf  $\Gamma(R)$  dengan menambahkan graf  $\Gamma(R)$  sebanyak  $n$  pada simpul  $v_{k+1}$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , sedemikian sehingga:

$$V(G) = \{u_{i,j}, v_k \mid i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, p-1, k = 1, 2, \dots, n+1\}.$$

$$E(G) = \{u_{i,j}v_k \mid i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, p-1, k = i, i+1\}.$$

Untuk lebih jelasnya, kita dapat melihat pada  $\Gamma(R)_3$  di bawah ini.



Gambar 5.  $\Gamma(R)_3$ .

Dari definisi 2 dan gambar 5,  $diam(\Gamma(R)_n) = 2n$  dan  $src(\Gamma(R)_n) = \lceil \sqrt{p-1} \rceil n$ .

## HASIL DAN PEMBAHASAN

### Bilangan Terhubung Pelangi pada Graf Hasil Amalgamasi dari Graf Pembagi Nol Atas Ring $R \cong Z_3 \times Z_p$

**Teorema 6.** Misalkan  $R$  ring komutatif dan  $\Gamma(R)$  graf pembagi nol atas  $R$ . Jika  $R \cong Z_3 \times Z_p$ , dimana  $p \geq 3$  bilangan prima, maka bilangan terhubung pelangi graf  $\Gamma(R)$  adalah

$$rc(\Gamma(R)_n) = \min\{\lceil \sqrt{p-1} \rceil n, 2(n+2)\}.$$

Bukti:

Misalkan  $R \cong Z_2 \times Z_p$ ,  $\Gamma(R)$  graf pembagi nol atas  $R$  dan  $G \cong \Gamma(R)_n$ . Didefinisikan sebuah pewarnaan  $c : E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, 4n\}$  sebagai berikut :

1.  $c(u_{i,j}v_l) = 3(i-1) + 1$ , untuk  $i = l \in \{1, 2, \dots, n\}$  dan  $j \in \{1, 4, 7\}$

2.  $c(u_{i,j}v_l) = 3(i - 1) + 2$ , untuk  $i = l \in \{1, 2, \dots, n\}$  dan  $j \in \{2, 5, 8\}$
3.  $c(u_{i,j}v_l) = 3(i - 1) + 3$ , untuk  $i = l \in \{1, 2, \dots, n\}$  dan  $j \in \{3, 6, 9\}$
4.  $c(u_{i,j}v_l) = 3i + 1$ , untuk  $i = l \in \{1, 2, \dots, n\}$  dan  $j \in \{10, 11, \dots, p - 1\}$
5.  $c(u_{i,j}v_l) = 4i - 3$ , untuk  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $j \in \{1, 2, 3\}$  dan  $l \in \{i + 1\}$
6.  $c(u_{i,j}v_l) = 4i - 2$ , untuk  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $j \in \{4, 5, 6\}$  dan  $l \in \{i + 1\}$
7.  $c(u_{i,j}v_l) = 4i - 1$ , untuk  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $j \in \{7, 8, 9\}$  dan  $l \in \{i + 1\}$
8.  $c(u_{i,j}v_l) = 4i - 1$ , untuk  $i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ ,  $j \in \{10, 11, \dots, p - 1\}$  dan  $l \in \{i + 1\}$

Misalkan  $p \geq 3$  prima. Perhatikan bahwa, untuk  $p \geq 3$ ,  $\lceil \sqrt[p]{p-1} \rceil \geq 2$ . Untuk membuktikan bahwa  $rc(\Gamma(R)_n) = \min\{\lceil \sqrt[p]{p-1} \rceil n, 2n + 4\}$ , dapat kita tinjau dalam 3 kasus

**Kasus 1.**  $\lceil \sqrt[p]{p-1} \rceil = 2$ . Akan ditunjukkan  $rc(\Gamma(R)_n) = 2n$

Karena  $\lceil \sqrt[p]{p-1} \rceil = 2$ , maka  $2 \leq p - 1 \leq 4$ . Karena  $diam(\Gamma(R)) = 2n$ , maka

$$2n \leq rc(\Gamma(R)_n) \leq src(\Gamma(R)_n) = \lceil \sqrt[p]{p-1} \rceil n = 2n$$

Jadi jelas bahwa  $rc(\Gamma(R)_n) = 2n$ .

**Kasus 2.**  $\lceil \sqrt[p]{p-1} \rceil = 3$ . Akan ditunjukkan  $rc(\Gamma(R)_n) = 3n$

Karena  $\lceil \sqrt[p]{p-1} \rceil = 3$ , maka  $p - 1 = 6$ . Karena  $diam(\Gamma(R)) = 2n$ , maka

$$2n \leq rc(\Gamma(R)_n) \leq src(\Gamma(R)_n) = \lceil \sqrt[p]{p-1} \rceil n = 3n$$

Jadi jelas bahwa  $rc(\Gamma(R)_n) = 2n$  atau  $rc(\Gamma(R)_n) = 3n$ . Klaim bahwa  $rc(\Gamma(R)_n) = 3n$ .

Andaikan terdapat suatu pewarnaan- $2n$  pelangi di  $\Gamma(R)_n$  sehingga untuk  $n = 1$ , terdapat suatu kode warna misalkan  $c : E(G) \rightarrow \{1, 2\}$  yang diberikan untuk setiap titik  $u \in U$ .

Karena  $p - 1 = 6$ , maka terdapat dua titik berbeda, yaitu  $u'$  dan  $u''$  dari  $U$  sedemikian sehingga  $c(u') = c(u'')$ . Karena sisi  $u' - u''$  dengan panjang lintasan 2 berwarna sama, maka tidak terdapat lintasan pelangi  $u' - u''$  di  $\Gamma(R)$ . Ini kontradiksi bahwa terdapat pewarnaan- $2$  pelangi di  $\Gamma(R)$ . Akibatnya untuk setiap  $n$  tidak terdapat pewarnaan- $2n$  pelangi di  $\Gamma(R)_n$ . Jadi haruslah  $rc(\Gamma(R)_n) = 3n$ .

**Kasus 3.**  $\lceil \sqrt[p]{p-1} \rceil \geq 4$ . Akan ditunjukkan  $rc(\Gamma(R)_n) = 2n + 4$

Karena  $\lceil \sqrt[p]{p-1} \rceil \geq 4$ , maka  $p - 1 \geq 10$ . Klaim bahwa  $rc(\Gamma(R)_n) = 2n + 4$ .

i. Akan ditunjukkan bahwa  $rc(\Gamma(R)_n) \geq 2n + 4$ .

Andaikan terdapat suatu pewarnaan- $3n$  pelangi di  $\Gamma(R)_n$  sehingga untuk  $n = 1$ , terdapat suatu kode warna misalkan  $c : E(G) \rightarrow \{1, 2, 3\}$  yang diberikan untuk setiap  $u \in U$ .

Karena  $p - 1 \geq 10$ , maka terdapat dua titik berbeda, yaitu  $u'$  dan  $u''$  dari  $U$  sedemikian sehingga  $c(u') = c(u'')$ . Karena sisi setiap lintasan  $u' - u''$  di  $\Gamma(R)$  memiliki panjang genap, maka lintasan pelangi  $u' - u''$  di  $\Gamma(R)$  yang mungkin hanyalah yang memiliki panjang 2. Karena  $c(u') = c(u'')$  maka warna sisi untuk setiap lintasan  $u' - u''$  yang memiliki panjang 2 adalah sama, sehingga tidak terdapat lintasan pelangi  $u' - u''$  di  $\Gamma(R)$ . Ini kontradiksi bahwa terdapat pewarnaan- $3n$  pelangi di  $\Gamma(R)$ . Akibatnya untuk setiap  $n$  tidak terdapat pewarnaan- $3n$  pelangi di  $\Gamma(R)_n$ . Jadi haruslah  $rc(\Gamma(R)_n) \geq 2n + 4$ .

ii. Akan ditunjukkan bahwa  $rc(\Gamma(R)_n) \leq 2n + 4$

Akan ditunjukkan bahwa terdapat pewarnaan- $4n$  pelangi di  $\Gamma(R)_n$ .

Misalkan didefinisikan pewarnaan  $c$  seperti pendefinisian di atas. Misalkan  $U' = \{u_{i,1}, u_{i,2}, \dots, u_{i,9}\}$  dan  $U'' = \{u_{i,10}, u_{i,11}, \dots, u_{i,p-1}\}$  dimana  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$



Misalkan  $x, y \in G$ . Akan kita tinjau dalam beberapa kasus.

**Kasus 1.** Misalkan  $x$  dan  $y$  bertetangga. Jelas akan ada lintasan pelangi  $x - y$ .

**Kasus 2.** Misalkan  $x = u_{i,j}, y = u_{i,l} \in U'$ , untuk  $i \in \{1,2, \dots, n\}, j \in \{1,2,3 \dots 8\}$  dan  $l \in \{1,2, \dots, 9\}$  dengan  $j \neq l$ .

- Jika  $j \in \{1,2,3\}$  dan  $l \notin \{j + 3n | n \in \{1,2\}\}$ , maka  $x, v_i, y$  adalah suatu lintasan pelangi  $x - y$  dengan panjang 2 di  $\Gamma(R)_n$ .
- Jika  $j \in \{1,2,3\}$  dan  $l \in \{j + 3n | n \in \{1,2\}\}$ , maka  $x = u_{i,j}, v_{i+1}, u_{i,l} = y$  adalah suatu lintasan pelangi  $x - y$  dengan panjang 2 di  $\Gamma(R)_n$ .

**Kasus 3.** Misalkan  $x = u_{i,j} \in U'$  dan  $y = u_{i,l} \in U''$ , untuk  $i \in \{1,2, \dots, n\}, j \in \{1,2,3 \dots 9\}$  dan  $l \in \{10,11, \dots, p - 1\}$ . Maka  $x, v_i, y$  adalah suatu lintasan pelangi  $x - y$  dengan panjang 2 di  $\Gamma(R)_n$ .

**Kasus 4.** Misalkan  $x = u_{i,j}, y = u_{i,l} \in U''$ , untuk  $i \in \{1,2, \dots, n\}, j \in \{10,11, \dots, p - 1\}$  dan  $l \in \{10,11, \dots, p - 1\}$  dengan  $j \neq l$ . Maka  $x, v_i, z, v_{i+1}, y$ , untuk suatu  $z \in U'$  adalah suatu lintasan pelangi  $x - y$  dengan panjang 4 di  $\Gamma(R)_n$ .

**Kasus 5.** Misalkan  $x = u_{i,j}$  dan  $y = u_{p,l}$ , untuk  $i \in \{1,2, \dots, n\}, j \in \{1,2, \dots, p - 1\}$ ,  $p \in \{i + 1, i + 2, \dots, n\}$  dan  $l \in \{1,2, \dots, p - 1\}$  dengan  $i \neq p$ . Maka  $x = u_{i,j}, v_{i+1}, u_{i+1,l}, v_{i+2}, u_{i+2,l}, \dots, v_p, u_{p,l} = y$  adalah suatu lintasan pelangi  $x - y$  dengan panjang  $n$  di  $\Gamma(R)_n$ .

**Kasus 6.** Misalkan  $x = v_i$  dan  $y = v_{i+1}$ , untuk  $i \in \{1,2, \dots, n\}$ . Maka  $x, u_{i,j}, y$ , untuk suatu  $u_{i,j}$  di  $G$  adalah suatu lintasan pelangi  $x - y$  dengan panjang 2 di  $\Gamma(R)_n$ .

**Kasus 7.** Misalkan  $x = v_i$  dan  $y = v_l$ , untuk  $i \in \{1,2, \dots, n\}$  dan  $l \in \{i + 1, i + 2, \dots, n + 1\}$ . Maka  $x = v_i, u_{i,j}, v_{i+1}, u_{i+1,j}, \dots, u_{n,j}, v_l = y$ , untuk suatu  $u_{i,j}$  di  $G$  adalah suatu lintasan pelangi  $x - y$  dengan panjang  $2n$  di  $\Gamma(R)_n$ .

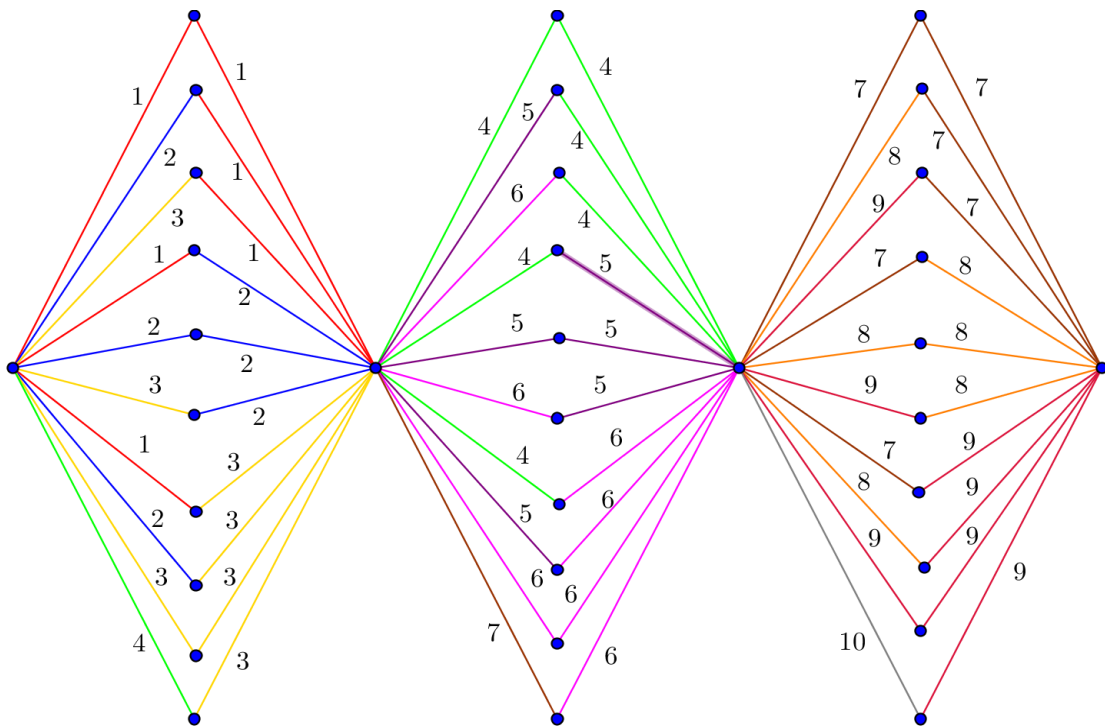
Dari 7 kasus di atas, kita peroleh bahwa  $rc(\Gamma(R)_n) \leq 2n + 4$

Berdasarkan i dan ii terbukti bahwa  $rc(\Gamma(R)_n) = 4n$ . Terbukti.

Untuk lebih jelasnya, Gambar 6 merupakan ilustrasi untuk teorema 6. Misalkan ring  $R \cong Z_3 \times Z_{11}$ . Pada Gambar 6, terlihat bahwa graf  $\Gamma(R \cong Z_3 \times Z_{11})_3$  mempunyai pewarnaan-10 pelangi, sehingga graf  $\Gamma(R \cong Z_3 \times Z_{11})_3$  mempunyai bilangan terhubung pelangi  $rc(\Gamma(R)) = 10$ .

## KESIMPULAN

Dari Penelitian yang dilakukan, dalam disimpulkan bahwa graf pembagi nol atas ring komutatif  $Z_3 \times Z_p$  ( $\Gamma(R)$ ) isomorfik dengan graf bipartit  $K_{2,n}$ , dimana Graf  $\Gamma(R) = K_{2,p-1}$ , sehingga  $rc(\Gamma(R)) = rc(K_{2,p-1}) = \min\{\lceil \sqrt{p-1} \rceil, 4\}$ . Graf hasil amalgamasi pada  $\Gamma(R)$ , dinotasikan dengan  $\Gamma(R)_n$ , jika  $G$  terdiri dari gabungan graf  $\Gamma(R)$  dengan menambahkan graf  $\Gamma(R)$  sebanyak  $n$  pada simpul  $v_{k+1}$ ,  $k = 1,2, \dots, n$ , sedemikian sehingga  $V(G) = \{u_{i,j}, v_k | i = 1,2, \dots, n, j = 1,2, \dots, p - 1, k = 1,2, \dots, n + 1\}$ , dan  $E(G) = \{u_{i,j}v_k | i = 1,2, \dots, n, j = 1,2, \dots, p - 1, k = i, i + 1\}$ . Graf  $\Gamma(R)_n$  memiliki  $diam(\Gamma(R)_n) = 2n$  dan  $src(\Gamma(R)_n) = \lceil \sqrt{p-1} \rceil n$ , sedangkan bilangan terhubung pelanginya adalah  $rc(\Gamma(R)_n) = \min\{\lceil \sqrt{p-1} \rceil n, 2n + 4\}$ .



Gambar 6. Pewarnaan pelangi pada graf  $\Gamma(R)_3$ .

## REFERENSI

- [1] Anderson, D. F. dan Phillip S. Livingston, 1999, The Zero-Divisor Graph of a Commutative Ring, *Journal of Algebra*, volume 217 : 434 – 447, Mathematic Departement, The University of Tennessee, Knoxville.
- [2] Diestel, Reinhard. 2005. *Graph Theory*, Electronic Edition 3. New York.
- [3] G. Chartrand, G.L. Johns, K.A. McKeon, P. Zhang. 2008. Rainbow connection in graphs, *Math. Bohemica*. Volume 133: 85-98.
- [4] I. Schiermeyer. 2009. Rainbow connection in graphs with minimum degree three. *Combinatorial Algorithms: Lecture Notes in Computer Science*. Vol 5874: 435-437.
- [5] J. Dong, X. Li. 2011. Upper bounds involving parameter  $\sigma_2$  for the rainbow connection. *ArXiv:1101.3119v1*. Tersedia pada <http://arxiv.org/abs/1101.3119v1>.
- [6] L.S. Chandran, A. Das, D. Rajendraprasad, N.M. Varma. 2010. Rainbow connection number and connected dominating sets. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*. Vol 38: 239-244.
- [7] M. Krivelevich, R. Yuster. 2009. The rainbow connection of a graph is (at most) reciprocal to its minimum degree. *Journal of Graph Theory*. Vol 63(3): 185-191.
- [8] Sy. Syafrizal, G.H. Medika, L. Yulianti. 2013. The rainbow connection of fan and sun. *Applied Mathematical Sciences*. Vol 7(64): 3155-3159.
- [9] X. Li, Y. Shi 2010. Rainbow connection in 3-connected graphs. *Graphs and Combinatorics*. Vol 29(5): 1471 -1475.
- [10] Y. Caro, A. Lev, Y. Roditty, Z. Tuza, R. Yuster. 2008. On rainbow connection. *Electronic Journal of Combinatorics*. Vol 15(1): R57.