

## **APLIKASI FILTER KALMAN DAN FILTER ADAPTIF KULLBACK-LEIBLER PADA MODEL OTOREGRESIF ORDO PERTAMA**

**Haris Hamzah dan Nina Fitriyati**

Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi,  
UIN Syarif Hidayatullah Jakarta  
Email: [harishamzah94@gmail.com](mailto:harishamzah94@gmail.com)

**Abstract:** Kalman filter is one of estimating method based on state-space model that consist of state equation and measurement equation. Kalman filter can be executed when the initial guess of error covariance matrix in the state equation and error covariance matrix in measurement equation precisely known. However, in reality it's difficult. Therefore, E.L. Pervukhina proposed an adaptive Kullback-Leibler filter. This research describes in details about this adaptive filter and its application to the first-order autoregressive model. Simulation data generated to support the application of these two methods. The result shows that the estimated state using both of these methods close to the measurement data. Furthermore, Kalman gain in the Kalman filter convergent to 0.9525 and Kalman gain in the Adaptive Kullback-Leibler filter convergent to 1.001. In addition, the variance of the state estimation in the Kalman filter is smaller than the variance of the state estimation in Adaptive Kullback-Leibler filter. These values respectively are 0.2122 and 0.2437.

**Keywords:** First-order autoregressive model, state-space, Kalman filter, Adaptive Kullback-Leibler Filter.

**Abstrak:** Filter Kalman adalah salah satu metode untuk mengestimasi suatu keadaan berdasarkan model ruang-keadaan yang terdiri dari persamaan keadaan dan persamaan pengukuran. Filter Kalman dapat dijalankan ketika dugaan awal mengenai matriks kovariansi eror pada persamaan keadaan dan matriks kovariansi eror pada persamaan pengukuran diketahui dengan tepat. Namun, hal itu sulit untuk dilakukan. Oleh karena itu, E. L. Pervukhina mengusulkan filter adaptif Kullback-Leibler. Penelitian ini menjelaskan secara detail mengenai filter adaptif tersebut dan aplikasinya terhadap model otoregresif ordo pertama. Data simulasi dibangkitkan untuk mendukung aplikasi dari filter Kalman dan filter adaptif. Hasil simulasi menunjukkan bahwa estimasi keadaan menggunakan kedua metode sangat dekat dengan data pengukuran. Kalman gain untuk filter Kalman konvergen ke nilai 0,9525 sedangkan Kalman gain untuk filter adaptif konvergen ke nilai 1,001. Selain itu, variansi estimasi keadaan untuk filter Kalman lebih kecil daripada variansi estimasi keadaan filter adaptif, dengan nilai masing-masing adalah 0,2122 dan 0,2437.

**Kata Kunci:** Model otoregresif ordo pertama, ruang keadaan, filter Kalman, filter adaptif Kullback-Leibler.

### **PENDAHULUAN**

Prakiraan (*forecasting*) bertujuan untuk memprediksi keadaan di masa yang akan datang menggunakan data dari masa lampau. Salah satu metode yang umum digunakan untuk

memprakirakan suatu keadaan adalah filter Kalman yang pertama kali diperkenalkan oleh Rudolf E. Kalman pada tahun 1960 [7]. Filter Kalman merupakan teknik asimilasi data yang paling sering digunakan sejak diperkenalkan karena merupakan filter yang efisien dengan meminimalkan *mean square error* (MSE) untuk mengestimasi keadaan dari sistem dinamik linier secara rekursif. Filter ini sangat handal dalam beberapa aspek yaitu mendukung estimasi keadaan masa lalu, sekarang, dan keadaan di masa depan serta dapat melakukannya ketika sifat sistem yang dimodelkan tidak diketahui [18].

Filter Kalman telah diaplikasikan dalam banyak sistem. John Valasek dan Wei Chen [6] menggunakan observer filter Kalman untuk mengidentifikasi secara online sistem pesawat. Filter Kalman cocok untuk mengidentifikasi secara online sistem pesawat dan secara umum cukup intensif mengendalikan intensitas *white noise* dari sensor Gaussian. Tahun 2005, filter Kalman diaplikasikan pada sistem hibrida linier oleh L. Boillereaux, dkk.[8]. Pada metode ini diterapkan penggunaan sensor invasif untuk memperkirakan suhu internal makanan hanya dengan menggunakan pengukuran suhu di permukaan. A. Tianoa, dkk. [1] menggunakan observer filter Kalman untuk mengidentifikasi model linier waktu diskrit multivariabel dari keadaan air bawah (*Autonomous Underwater Vehicle - AUV*). Pada penelitian tersebut, *Observer Kalman Filter Identification* (OKID) digunakan untuk mengevaluasi efektivitas dalam mengidentifikasi eksperimental perilaku dinamis dari sebuah AUV.

Ide dasar dari metode ini adalah dengan membentuk sistem dinamik ke dalam bentuk khusus yang disebut dengan representasi ruang-keadaan (Hamilton, [5]). Misalkan  $Z_t$  adalah pengukuran yang terobservasi dan  $Y_t$  adalah keadaan yang tak terobservasi maka representasi ruang-keadaan dapat dibentuk sebagai berikut:

$$\begin{cases} \text{Keadaan: } x_t = Ax_{t-1} + v_t, & v_t \sim N(0, R) \\ \text{Pengukuran: } y_t = Hx_t + w_t, & w_t \sim N(0, Q) \end{cases} \quad (1)$$

dengan  $A$  dan  $H$  adalah matriks parameter,  $Q$  adalah variansi gangguan (*noise*) pada model keadaan, dan  $R$  adalah variansi gangguan pada pengukuran.

Informasi/keadaan awal diperlukan untuk memulai algoritma filter Kalman, namun pada umumnya keadaan awal ini tidak diketahui. Oleh karena itu, Pervukhina [15] mengusulkan filter adaptif pada model deret waktu *autoregressive moving average*, ARMA(1,1), untuk mengatasi ketaksediaan keadaan awal. Filter adaptif yang dibangun oleh Pervukhina [15] meminimalkan kriteria divergensi Kullback-Leibler sehingga filter ini dikenal dengan filter adaptif Kullback-Leibler. Filter ini dapat bekerja meskipun informasi mengenai matriks kovariansi error pada persamaan keadaan dan persamaan pengukuran tidak diketahui. Pada penelitian ini akan ditelaah lebih detail mengenai perbedaan aplikasi pada filter Kalman dan filter adaptif Kullback-Leibler menggunakan data simulasi yang dibangkitkan dari model otoresif ordo pertama.

## TINJAUAN PUSTAKA

### Data Runtun Waktu

Menurut Makridakis [9], runtun waktu adalah kumpulan data dari beberapa tahapan waktu secara kronologis. Pada umumnya data ini merupakan kumpulan dari suatu kejadian dalam waktu harian, mingguan, bulanan atau tahunan. Data runtun waktu dapat bersifat

deterministik atau probabilistik. Data deterministik mempunyai nilai yang tetap sedangkan data probabilistik (data stokastik) nilainya berubah-ubah karena merupakan kemungkinan nilai yang dapat terjadi dari sekian banyak kejadian.

Model untuk data runtun waktu dapat dinyatakan dalam bentuk dan proses stokastik yang berbeda, dan model yang paling banyak digunakan adalah autoregressive (AR), moving average (MA), dan autoregressive moving average (ARMA). Proses stokastik adalah suatu himpunan peubah acak  $Z_t$  atau  $Z(t)$  yang nilai berubah terhadap waktu dengan cara yang tidak menentu, dimana  $t \in T$  dengan  $T = \{1, 2, 3, \dots\}$  untuk  $t$  diskrit dan  $T = \{0, \infty\}$  untuk  $t$  kontinu. Misalkan  $Z_1$  adalah peubah acak yang berhubungan dengan kejadian pertama,  $Z_2$  adalah peubah acak yang berhubungan dengan kejadian kedua sampai dengan  $Z_n$  adalah peubah acak yang berhubungan dengan kejadian ke- $n$ , maka  $\{Z_1, Z_2, \dots, Z_n\}$  disebut dengan proses stokastik.

### Model Autoregressive Moving Average (ARMA)

Model ARMA( $p, q$ ) merupakan campuran model *autoregressive* AR( $p$ ) dan model *moving average* MA( $q$ ). Untuk data yang stasioner kombinasi model AR( $p$ ) dan MA( $q$ ) menghasilkan model ARMA ( $p, q$ ). Bentuk umum model ARMA ( $p, q$ ) adalah sebagai berikut [12]:

$$Z_t = c + \phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + \dots + \phi_p Z_{t-p} + e_t + \theta_1 e_{t-1} + \dots + \theta_q e_{t-q} \quad (2)$$

dengan  $c$  adalah nilai konstan,  $\theta_q$  parameter model MA,  $\phi_p$  parameter model AR dan  $e_t$  nilai residual pada ssat  $t$  yang bersifat *white noise*.

### Representasi Ruang Keadaan

Representasi ruang keadaan untuk suatu sistem dinamik tidaklah tunggal. Berdasarkan Hamilton [5], berikut adalah contoh representasi ruang keadaan untuk model ARMA( $p, q$ ).

Persamaan Keadaan ( $r = \max\{p, q+1\}$ ):

$$\begin{bmatrix} Z_t - \mu \\ Z_{t-1} - \mu \\ Z_{t-2} - \mu \\ \vdots \\ Z_{t-n} - \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \dots & \phi_{n-1} & \phi_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{t-1} - \mu \\ Z_{t-2} - \mu \\ Z_{t-3} - \mu \\ \vdots \\ Z_{t-n-1} - \mu \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_t \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

Persamaan Pengukuran ( $n = 1$ ):

$$Z_t = \mu + [1 \quad \theta_1 \quad \theta_2 \quad \dots \quad \theta_{n-1}] \begin{bmatrix} Z_t - \mu \\ Z_{t-1} - \mu \\ Z_{t-2} - \mu \\ \vdots \\ Z_{t-n} - \mu \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_t \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

Dengan memisalkan:

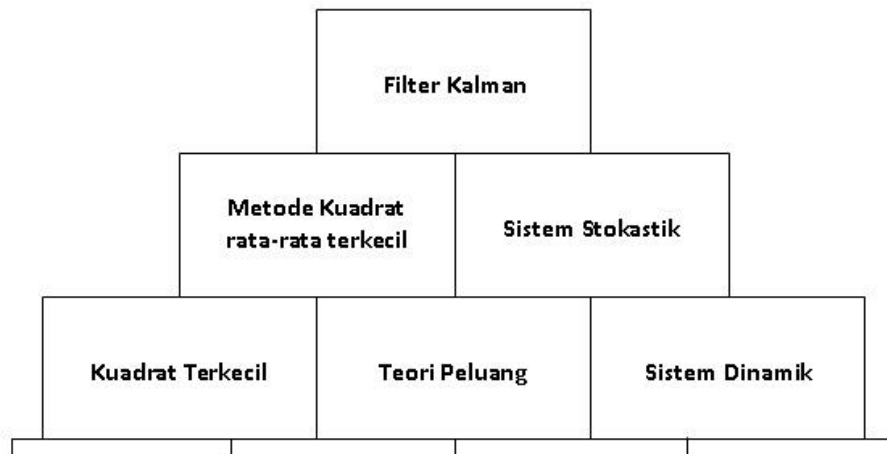
$$x_t = \begin{bmatrix} Z_t - \mu \\ Z_{t-1} - \mu \\ Z_{t-2} - \mu \\ \vdots \\ Z_{t-n} - \mu \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \cdots & \phi_{n-1} & \phi_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}, v_t = \begin{bmatrix} e_t \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ dan } H = [1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0],$$

maka akan diperoleh representasi ruang keadaan pada Persamaan (1).

### Filter Kalman

Filter Kalman merupakan salah satu penemuan terbesar abad ke-20 di bidang teori estimasi secara statistik. Filter Kalman diperkenalkan oleh Rudolf Emil Kalman pada tahun 1960. Konsep-konsep dasar yang berkaitan dengan filter Kalman adalah teori peluang, kuadrat terkecil dan sistem dinamik pada tingkat paling mendasar, dan konsep tentang proses stokastik dan metode rata-rata kuadrat pada tingkat berikutnya. Grewal dan Andrews [4] membuat tingkatan konsep-konsep ini seperti pada Gambar 1.

Filter Kalman dapat mengestimasi keadaan dari suatu proses dengan cara meminimalkan rataan galat kuadrat. Filter ini sangat tangguh dalam beberapa aspek: dapat mengestimasi keadaan yang lalu, keadaan sekarang, dan keadaan yang akan datang, serta dapat digunakan pada sistem yang memuat observasi yang tidak diketahui (Welch dan Bishop)[17].



**Gambar 1.** Konsep-konsep Dasar pada Filter Kalman [4]

Perhatikan model AR(1) stasioner berikut:

$$x_t = ax_{t-1} + v_t, \quad v_t \sim N(0, \sigma_v^2). \quad (5)$$

Persamaan ruang-keadaan pada model (5) adalah

$$\begin{cases} \text{Keadaan: } x_t = ax_{t-1} + v_t, & v_t \sim N(0, \sigma_v^2) \\ \text{Pengukuran: } y_t = x_t + w_t, & w_t \sim N(0, \sigma_w^2) \end{cases} \quad (6)$$

Algoritma filter Kalman terdiri dari 3 tahap yaitu awal, prediksi, dan analisis. Untuk ruang keadaan (6), algoritma Kalman filter adalah sebagai berikut:

1. Tahap awal

$$\text{Tentukan keadaan awal: } \hat{x}_t^- \sim N(\mu_0, P_0) \quad (7)$$

2. Tahap prior

$$\text{Keadaan: } \hat{x}_t^- = a\hat{x}_{t-1} \quad (8)$$

$$\text{Matriks Kovariansi: } P_t^- = a^2 P_{t-1} + \sigma_v^2 \quad (9)$$

3. Tahap analisis

$$\text{Keadaan: } \hat{x}_t = \hat{x}_t^- + P_t^- (P_t^- + \sigma_v^2)^{-1} (y_t - a\hat{x}_{t-1}) \quad (10)$$

$$\text{Definisikan Kalman gain } K_t = P_t^- (P_t^- + \sigma_v^2)^{-1} \quad (11)$$

$$\text{Matriks Kovariansi: } P_t = (I - K_t) P_t^- \quad (12)$$

Meinhold dan Singpurwala [10] menunjukkan bagaimana filter Kalman dapat dengan mudah dipahami oleh statistikawan apabila menggunakan formulasi Bayes dan beberapa metode pada statistika multivariat. Filter Kalman telah digunakan secara ekstensif seperti pada proses sinyal (Mneimneh dkk., [11]), ekonomi (Chen dkk., [2]), ruang angkasa (Ott dkk., [13]), dan prediksi produksi minyak bumi (Fitriyati dkk., [3]). Filter Kalman juga dapat digunakan sebagai kontrol suatu model dinamika ruang-waktu (Schiff dan Sauer, [16]).

### Filter Adaptif Kullback-Leibler pada Model AR(1)

Ide dasar filter ini adalah menggunakan jarak Kullback Leibler [14]. Jarak Kullback Leibler untuk fungsi kepadatan peluang  $g$  dan  $f$  didefinisikan dengan [15]

$$J_{g,f}(y) = J(g, f) = \int [g(y) - f(y)] \ln \frac{g(y)}{f(y)} dy. \quad (13)$$

Beberapa sifat jarak Kullback-Leibler adalah (i)  $J(g, f) > 0$ , jika  $g(y) \neq f(y)$ , (ii)  $J(g, f) = 0$ , jika  $g(y) = f(y)$ , dan (iii)  $J(g, f) = J(f, g)$ , jika  $g(y) \neq f(y)$ .

Perbedaan algoritma pada filter adaptif Kullback-Leibler dengan algoritma Kalman filter terletak pada persamaan pada tahap analisis (10). Pada filter adaptif, keadaan pada Persamaan (10) dihitung menggunakan formula berikut [14]:

$$\hat{x}_{t+1} = a\hat{x}_t + k_t z_t = a(1 - k_t) \hat{x}_t + k_t y_t. \quad (14)$$

dengan  $E[\hat{x}_t] = E[\hat{x}_{t+1}] = 0$ . Variansi dari persamaan (11) adalah

$$\hat{\sigma}_{t+1}^2 = a^2 (1 - k_t)^2 \sigma_t^2 + T_t k_t^2, \quad (15)$$

dengan  $T_t = E[y_t^2]$ .

Pada keadaan tunak (*steady state*), variansi  $\hat{\sigma}^2 = \hat{\sigma}_t^2 = \hat{\sigma}_{t+1}^2$ , kalman gain  $k = k_t = k_{t-1}$ , dan variansi observasi  $T = T_t$ . Misalkan variansi keadaan  $x_t$  yang sebenarnya dinyatakan dengan  $\text{var}(x_t) = \sigma^2$ , dengan variansi keadaan estimasi  $\hat{x}_t$  dinyatakan dengan  $\text{var}(\hat{x}_t) = \hat{\sigma}_t^2$ .

## Aplikasi filter Kalman dan filter adaptif Kullback-Liebler pada model Otoresif ordo pertama

Untuk mencari nilai Kalman gain pada keadaan tunak, meminimalkan jarak antara  $\sigma^2$  dan  $\hat{\sigma}^2$  menggunakan Persamaan (13):

$$J(\sigma^2, \hat{\sigma}^2) = \frac{1}{2} \left( \frac{\sigma^2}{\hat{\sigma}^2} + \frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \right) - 1 = \frac{(\sigma^2 - \hat{\sigma}^2)^2}{2\sigma^2\hat{\sigma}^2}. \quad (16)$$

Untuk meminimumkan jarak pada Persamaan (16), maka  $\frac{\partial J(g, f)}{\partial k_i} = 0$  yaitu

$$\frac{\partial J(\sigma^2, \hat{\sigma}^2)}{\partial k} = \frac{\partial J(\sigma^2, \hat{\sigma}^2)}{\partial \hat{\sigma}^2} \cdot \frac{\partial \hat{\sigma}^2}{\partial k} = \frac{1}{2} \left( \frac{-\sigma^2}{\hat{\sigma}^4} + \frac{1}{\sigma^2} \right) \cdot \frac{\partial \hat{\sigma}^2}{\partial k} = 0 \quad (17)$$

Persamaan (17) terpenuhi jika (i)  $\frac{\partial \hat{\sigma}^2}{\partial k} = 0$  atau (ii)  $\left( \frac{-\sigma^2}{\hat{\sigma}^4} + \frac{1}{\sigma^2} \right) = 0$ .

Jika kondisi (i) terpenuhi maka diperoleh Kalman gain pada keadaan tunak adalah [14]:

$$k = \frac{a^2 \hat{\sigma}^2}{a^2 \hat{\sigma}^2 + T}.$$

Untuk sistem satu dimensi berlaku  $k = 0$  atau  $k = \frac{a^2 - 1}{a^2} < 0$ .

Dan jika kondisi (ii) terpenuhi maka  $\hat{\sigma}^2 = \sigma^2$ , hal ini berarti bahwa variansi  $\hat{x}_t$  optimal ketika dipaksa sama dengan variansi  $x_t$ .

## HASIL DAN PEMBAHASAN

Data yang digunakan dalam penelitian ini adalah data simulasi model AR(1) dengan banyak 224 yang dibangkitkan secara random menggunakan perangkat lunak Minitab. Statistik deskriptif data adalah sebagai berikut:

**Tabel 1.** Analisis Deskriptif Data Simulasi

Variabel	N	Minimum	Maksimum	Rata-rata	Standar Deviasi
Data Simulasi	224	0,1484	2,5154	1,2122	0,4648

### Estimasi Parameter

Selanjutnya estimasi model AR(1) menggunakan metode *least square*.

**Tabel 2.** Estimasi Parameter Model AR(1)

Variabel	Koefisien	Standar Error	t-statistik	Prob.
AR(1)	0,2146	0,0660	3,25	0,01
$c$	0,95125	0,03041	31,28	0,000
$\mu$	1,21121	0,03873		

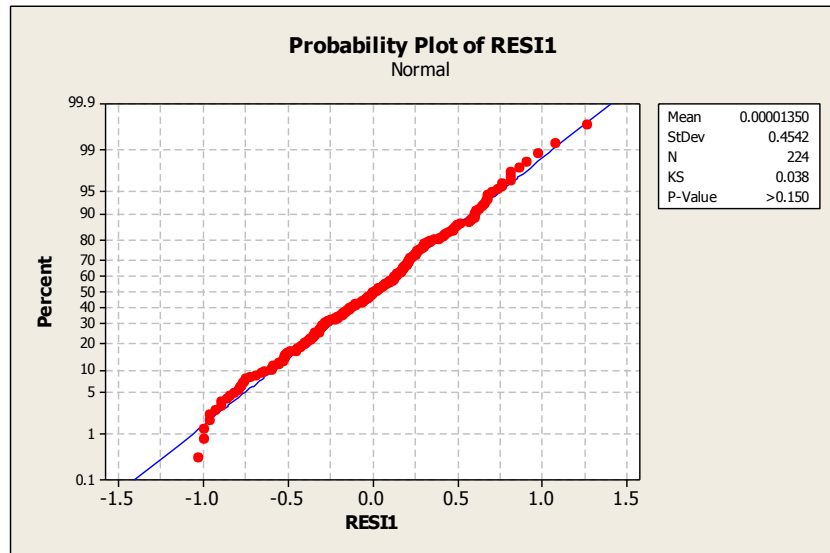
Berdasarkan tabel 2, model AR(1) yang terbentuk adalah

$$Z_t = 0,2146Z_{t-1} + 1,21 + e_t.$$

Plot uji residual model di atas digambarkan pada Gambar 2. Model ruang keadaan untuk model AR(1) adalah sebagai berikut :

Persamaan keadaan:  $x_t = 0,2146x_{t-1} + v_t, v_t \sim N(0,0.2)$

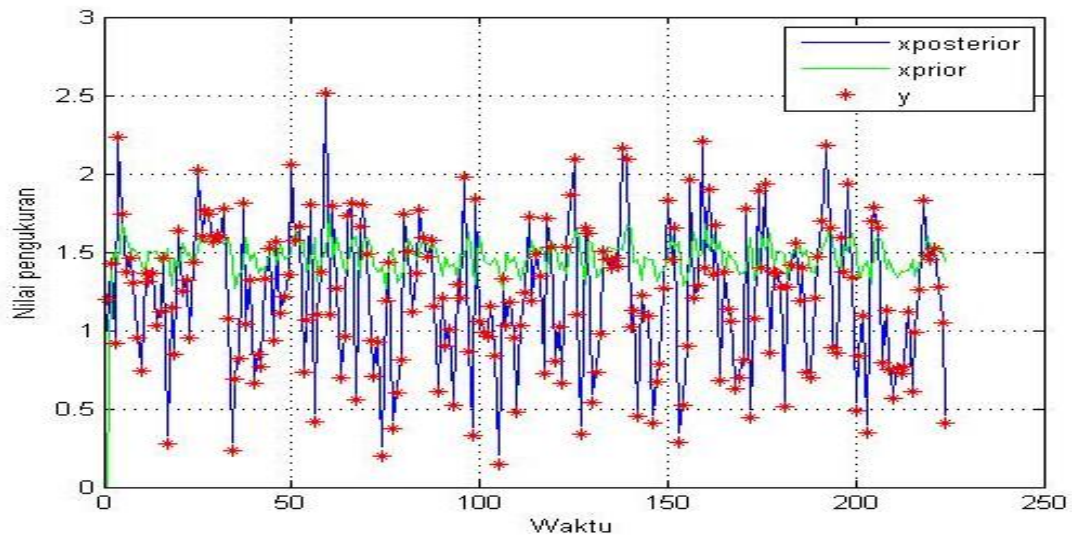
Persamaan pengukuran:  $y_t = x_{t-1} + w_t, w_t \sim N(0,0.01)$



Gambar 2. Plot Normality-test Model AR(1)

### Hasil Simulasi Filter Kalman

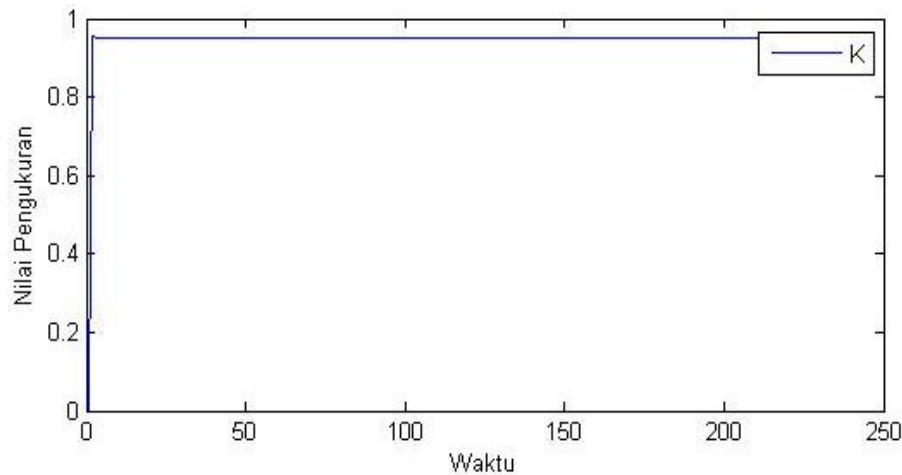
Simulasi filter Kalman dilakukan berdasarkan ruang keadaan untuk model AR(1) dan nilai awal  $\hat{x}_0 = 1$  dan  $P_0 = 0,1$ . Hasil simulasi dapat dilihat pada Gambar 3.



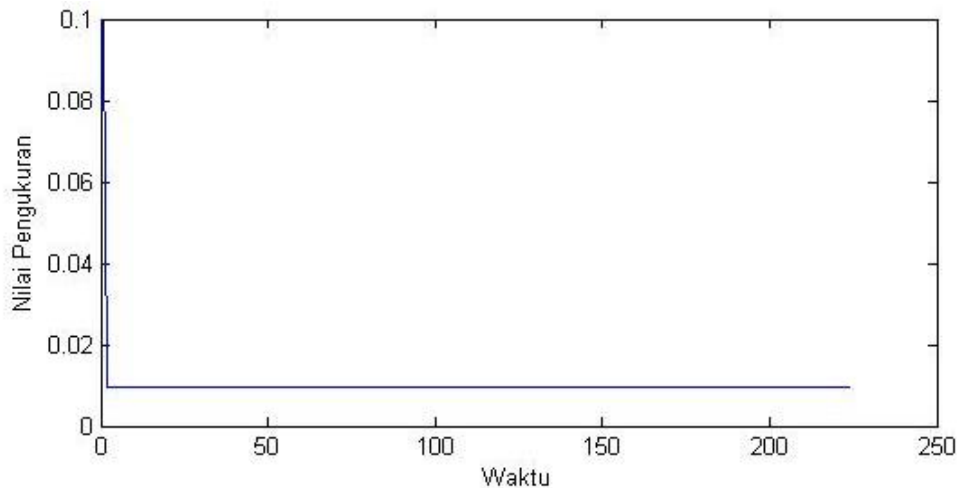
Gambar 3. Hasil estimasi keadaan menggunakan filter Kalman

## Aplikasi filter Kalman dan filter adaptif Kullback-Liebler pada model Otoresif ordo pertama

Berdasarkan Gambar 3 terlihat bahwa nilai estimasi sebelum pengukuran ( $\hat{x}_t^-$ ) jauh dari data. Namun setelah dikoreksi menggunakan persamaan (10), nilai estimasi ( $\hat{x}_t$ ) mendekati data. Nilai Kalman gain dan kovariansi error ( $P_t$ ) yang dihasilkan masing-masing tertera pada Gambar 4 dan 5. Berdasarkan Gambar 4 terlihat bahwa nilai Kalman *gain* konstan pada iterasi ketiga dan seterusnya. Nilai  $K_t$  konvergen ke nilai 0,9525. Untuk menganalisa baik atau tidaknya filter Kalman yang digunakan, dapat dilihat grafik  $P_t$ . Estimasi akan semakin baik jika nilai  $P_t$  mendekati nol. Dari Gambar 5 dapat dilihat bahwa nilai  $P_t$  stabil dari iterasi ketiga dan konvergen menuju ke nilai 0,0095.



**Gambar 4.** Nilai Kalman *Gain* pada filter Kalman.



**Gambar 5.** Matriks Kovariansi Posterior ( $P_t$ ) pada filter Kalman.

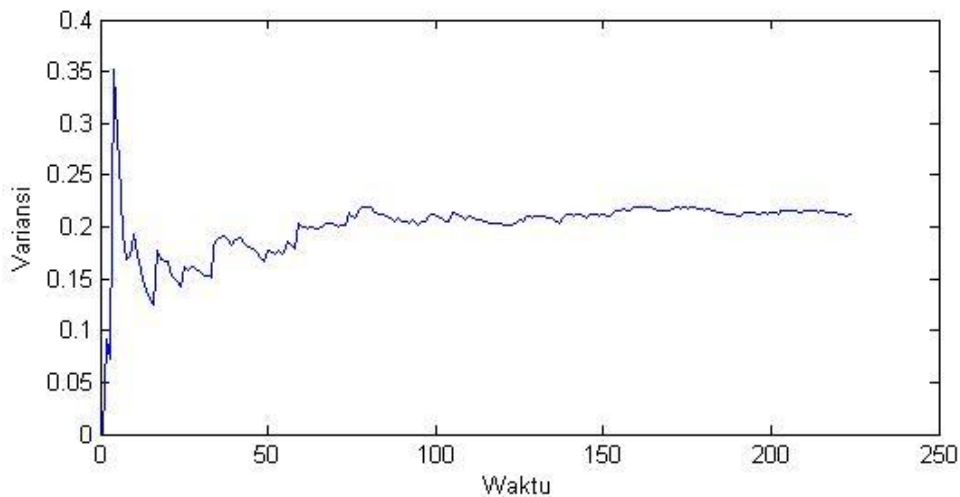
Gambar 6 menunjukkan nilai variansi  $\hat{x}_t$  berdasarkan waktu  $t$ . Berdasarkan Gambar ini terlihat bahwa nilai variansi  $\hat{x}_t$  konvergen ke suatu nilai yaitu 0,2122.

### Hasil Simulasi Filter Adaptif Kullback-Leibler

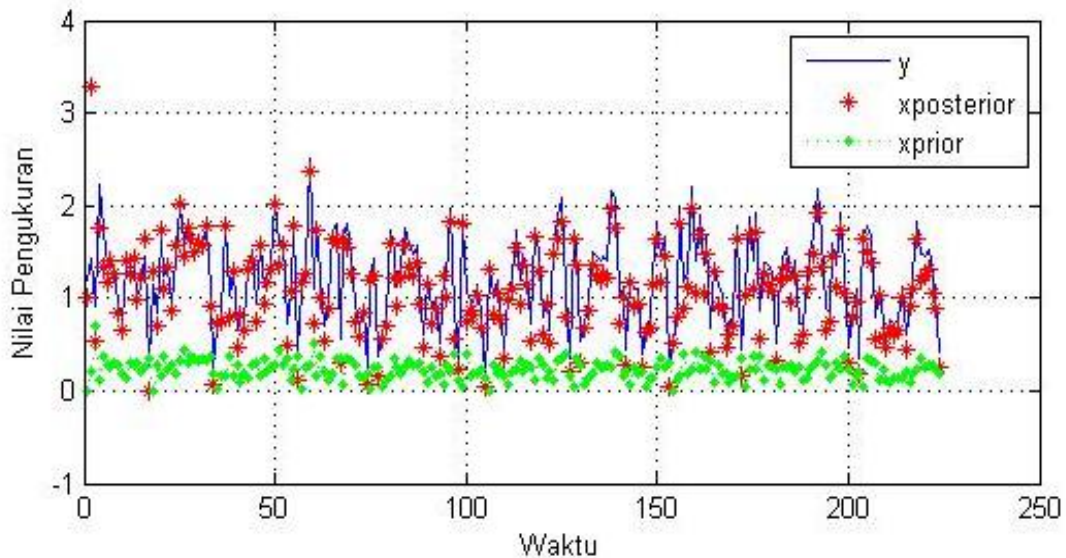
Pembentukan ruang keadaan untuk filter adaptif Kullback-Leibler berbeda dengan filter Kalman. Perbedaannya terletak pada error ruang keadaan. Filter adaptif Kullback-Leibler mengasumsikan bahwa matriks kovariansi *error* ruang keadaan tidak diketahui. Sehingga parameter-parameter yang digunakan pada algoritma ini adalah  $A = 0,2146$ ,  $H = 1$ ,  $\sigma^2 = 0,2161$ , dan  $\hat{x}_0 = 1$ . Hasil simulasi dapat dilihat pada Gambar 7. Gambar ini menunjukkan



plot data simulasi ( $y_t$ ), nilai estimasi sebelum pengukuran ( $\hat{x}_t^-$ ), dan nilai estimasi setelah pengukuran ( $\hat{x}_t$ ).



**Gambar 6.** Variansi Nilai  $\hat{x}_t$  Filter Kalman



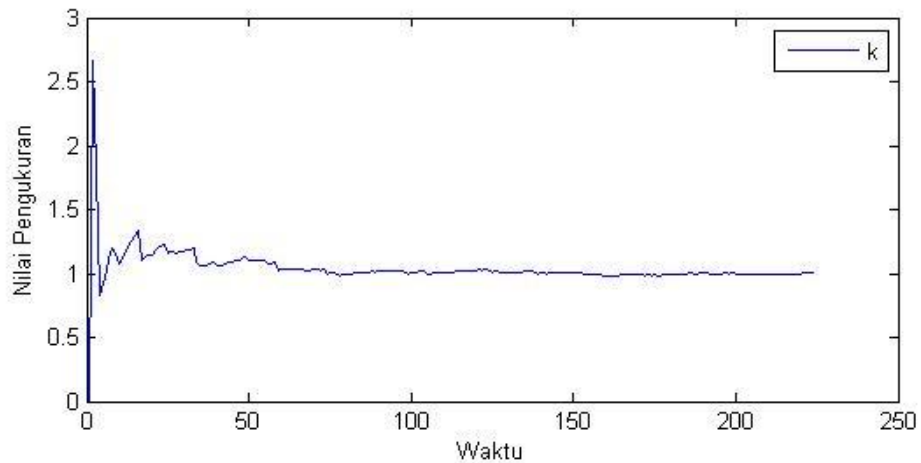
**Gambar 7.** Hasil Estimasi menggunakan Filer Adaptif Kullback-Leibler

Nilai Kalman gain dan kovariansi error ( $P_t$ ) yang dihasilkan pada simulasi menggunakan filter adaptif Kullback-Leibler masing-masing tertera pada Gambar 8 dan 9. Berdasarkan Gambar 8 terlihat bahwa nilai estimasi sebelum pengukuran ( $\hat{x}_t^-$ ) jauh dari data. Namun setelah dikoreksi menggunakan persamaan (14), nilai estimasi setelah pengukuran ( $\hat{x}_t$ ) mendekati data simulasi artinya pemilihan parameter sudah benar. Selanjutnya Gambar 8 memperlihatkan plot nilai Kalman gain ( $k_t$ ) yang semakin stabil dan konvergen ke nilai 1,001. Gambar 9 merupakan plot nilai variansi dari  $\hat{x}_t$  berdasarkan waktu  $t$ . Nilai variansi  $\hat{x}_t$  konvergen ke 0,2437.

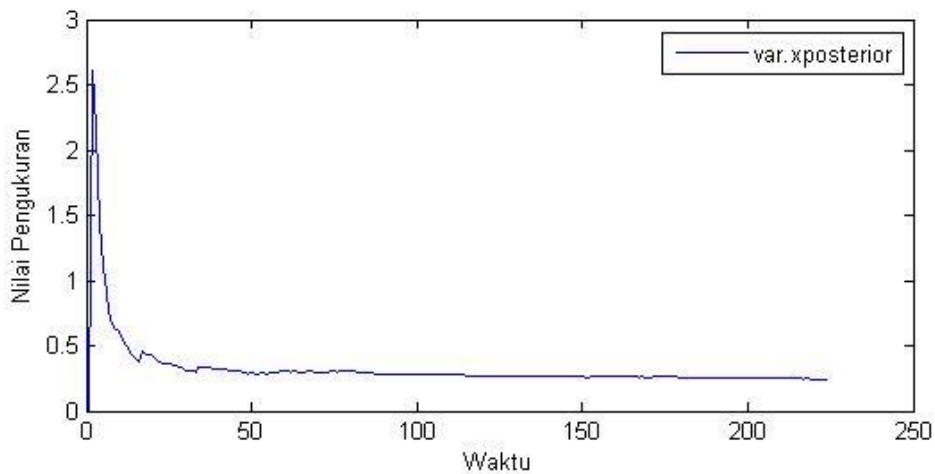
Perbandingan filter Kalman dan filter adaptif Kullback-Leibler terletak pada nilai Kalman gain dan variansi estimasi keadaan ( $\hat{x}_t$ ). Dengan menggunakan data simulasi pada penelitian ini, diperoleh bahwa nilai Kalman gain untuk filter Kalman lebih cepat stabil jika dibandingkan dengan filter adaptif Kullback-Leibler. Selain itu, variansi  $\hat{x}_t$  filter Kalman lebih kecil dibandingkan dengan filter adaptif Kullback-Leibler. Namun algoritma filter

## Aplikasi filter Kalman dan filter adaptif Kullback-Liebler pada model Otoresif ordo pertama

adaptif Kullback-Leibler mempunyai kelebihan yaitu dapat mengestimasi ruang keadaan ketika error keadaan  $Q$  dan  $R$  tidak diketahui.



**Gambar 8.** Nilai Kalman gain pada filter adaptif Kullback-Leibler



**Gambar 9.** Variansi Nilai  $\hat{x}_t$  pada filter adaptif Kullback-Leibler

### KESIMPULAN

Pada penelitian ini telah dibahas aplikasi dari filter Kalman dan filter adaptif Kullback-Leibler menggunakan model AR(1). Data simulasi dibangkitkan dari model AR(1) berikut :

$$Z_t = 0,2146Z_{t-1} + 1,21 + e_t.$$

Model ruang keadaan dapat dibentuk dari persamaan di atas, kemudian model ruang keadaan ini digunakan untuk memprediksi keadaan di masa yang akan datang menggunakan algoritma filter Kalman dan filter adaptif Kullback-Leibler. Hasil simulasi pada kedua metode ini menunjukkan bahwa nilai Kalman gain untuk filter Kalman konvergen ke nilai 0,9525 sedangkan nilai Kalman gain untuk filter adaptif Kullback-Leibler konvergen ke nilai 1,001. Selain itu, nilai variansi dari estimasi keadaan untuk filter Kalman dan filter adaptif Kullback-Leibler masing-masing konvergen ke nilai 0,2122 dan 0,2437.

**REFERENSI**

- [1] A. Tianoa, R. Suttonb, A. Lozowicki, W. Naeemb, 2007, "Observer Kalman Filter Identification of an Autonomous Underwater Vehicle", *Elsevier. Control Engineering Practice* **15**, hal. 727-739.
- [2] Chen, L.H., 2001, Inflation and Real Short-Term Interest Rates - A Kalman Filter Analysis of The Term Structure, *Applied Economic*, **33(7)**, hal. 855-861.
- [3] Fitriyati, Nina, 2010, Forecasting Oil Production Using Kalman Filter, *Proceedings Of The Third International Conference On Mathematics and Natural Sciences (ICMNS)*, ITB, hal. 1085-1094.
- [4] Grewal, M.S., dan Andrews, A. P., 2001, *Kalman Filtering Theory and Practice Using MATLAB*, Third Edition, John Wiley & Sons, Inc.
- [5] Hamilton, J. D., 1994, *Time Series Analysis*, Princeton University Press New Jersey.
- [6] John Valasek, Wei Chen, 2003, "Observer/Kalman Filter Identification for Online System Identification of Aircraft". *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. **26**, No. 2.
- [7] Kalman, R. E., 1960, "A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problem", *Transactions of the ASME-Journal of Basic Engineering*, Series D.82. hal. 34-35.
- [8] L. Boillereaux, H. Fibrianto, J. M. Flaus, 2005, "A switched Kalman filter dedicated to Assisted pressure food thawing". *Elsevier. Computers and Electronicsin Agriculture*, **49**, hal. 392-406.
- [9] Makridakis, S., Wheelwright, S.C., & McGee, V.E, 1999. *Forecasting Method And Application*. Jakarta: Erlangga.
- [10] Meinhold, R.J., and Singpurwala, N. D., 1983, Understanding the Kalman Filter, *American Statistician*, **37**, hal. 253-256.
- [11] Mneimneh, M.A., Yaz, E. E., Johnson, M.T., dan Povinelli, R. J., 2006, An Adaptive Kalman Filter for Removing Baseline Wandering in ECG Signals, *Computer in Cardiology*, **33**, hal. 253-256.
- [12] Montgomery, D. C., 2008, *Introduction To Time Series Analysis and Forecasting*. USA: John Wiley & Sons, Inc.
- [13] Ott, E., Hunt, B. R., Szunyogh, I., dan Zimin, A. V., 2004, A Local Ensemble Kalman Filter for Atmospheric Data Assimilation, *Tellus*, **56A**, hal. 415-428.
- [14] Pervukhina, E. L., & Emmenegger, J.-F., 2005, Adaptive Time Series Filters Obtained By Minimisation of The Kullback-Leibler Divergence Criterion. *International Journal of Applied Mathematics*, Vol. **17**, N1, hal. 69-89.
- [15] S. Kullback, 1978, *Information Theory and Statistics*. New York: Dover Publications, Inc.
- [16] Schiff, S. J., dan Sauer, T., 2008, Kalman Filter Control of a Model of Spatiotemporal Cortical Dynamics, *J. Neural Eng.*, **5**, hal. 1-8.
- [17] Welch, Greg & Bishop, Gary, 2006, *An Introduction to The Kalman Filter*. Chappel Hill: Department of Computer Science University of North Carolina.
- [18] Wei, W.W.S., 2006, *Time Series Analysis: Univariate and Multivariate Methods Second Edition*. New Jersey : Pearson Prentice Hall.