Jurnal "LOG!K@" , Jilid 6, No. 2, 2016, Hal. 152 - 160
ISSN 1978 – 8568

PELABELAN TOTAL $(\boldsymbol{a}.\boldsymbol{d})$ SISI ANTIAJAIB SUPER PADA GRAF $\boldsymbol{P_3 \cup P_n}$

Yanne Irene
Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Syarif Hidayatullah Jakarta
Email: yanne.irene@uinjkt.ac.id

Abstract: Let *G* be a graph with *p* vertices and q edges. An edge anti-magic total labeling on graph *G* is an one-to-one mapping λ from $V(G) \cup E(G)$ onto the set $\{1,2,\ldots,p+q\}$ such as $\omega_\lambda(xy) = \lambda(x) + \lambda(xy) + \lambda(y)$ is different for each $xy \in E(G)$ and form arithmetic sequence.If λ(*V*(*G*))=$\{1,2,\ldots,p\}$ then λ called super edge anti-magic total labelling. In this article we show that $P_3 \cup P_n$ super edge anti-magic.
Keywords: edge anti-magic total labeling, super edge anti-magic total labelling, graph $P_3 \cup P_n$.

Abstrak: Misalkan *G* adalah graf dengan *p* titik dan *q* sisi. *Pelabelan total sisi anti ajaib* pada graf *G* adalah pemetaan satu-satu dan pada λ dari $V(G) \cup E(G)$ pada $\{1,2,\ldots,p+q\}$ sedemikian hingga $\omega_\lambda(xy) = \lambda(x) + \lambda(xy) + \lambda(y)$ tidak sama untuk setiap $xy \in E(G)$ dan membentuk suatu barisan aritmatik. Jika λ(*V*(*G*))=$\{1,2,\ldots,p\}$ maka λ dinamakan pelabelan total sisi anti ajaib super. Pada tulisan ini akan ditunjukkan pelabelan total sisi anti ajaib super pada graf tidak terhubung $P_3 \cup P_n$.
Kata kunci: Pelabelan total sisi anti ajaib, pelabelan total sisi anti ajaib super, graf tidak terhubung, graf $P_3 \cup P_n$..

PENDAHULUAN

Pelabelan graf merupakan salah satu topik dalam teori graf.Secara umum objek kajiannya merupakan graf yang direpresentasikan oleh titik, sisi, dan himpunan bagian bilangan asli yang disebut label. Pertama kali diperkenalkan oleh Sadlack (1964), kemudian Stewart (1966), Kotzig dan Rosa (1970) [6].

Lladó dan Moragas telah membuktikan bahwa sebuah roda w_n, prisma $C_n \times K_2$, buku $K_{1,n} \times K_2$, dan kincir $W(r,k)$ adalah C_h-ajaib. Maryati, Baskoro, Salman dan Salman, Ngurah, Izzati telah membuktikan bahwa kumpulan pohon adalah P_h-ajaib super. Hingga akhirnya Ngurah, Salman, dan Susilowati memperkenalkan pelabelan H-ajaib-super.

Sejumlah penelitian sebelumnya tentang pelabelan tentang graf, di antaranya adalah pelabelan super sisi ajaib pada graf star $K_{l,n}$,pada tahun 2007 oleh Lala Fitria. Pada tahun 2008, Muntiani telah meneliti pelabelan total sisi anti ajaib super untuk graf lintasan nP_5. Padatahun 2010, Ramdhan Suwarman telah meneliti pelabelan graceful dan konsekutif pada graf lintasan P_5. Pada tahun 2012, Purnama telah meneliti pelabelan total (a,d)-sisi-antiajaib super pada graf roda pW_r.

Pada tahun 2000, Simanjuntak, Miller, dan Bertault mengenalkan pelabelan total $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{d})$-sisi-antiajaib dari $\boldsymbol{G}$ yang didefinisikan sebagai fungsi bijektif $\boldsymbol{\xi}: \boldsymbol{V}(\boldsymbol{G}) \cup \boldsymbol{E}(\boldsymbol{G}) \rightarrow \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \dots, \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{G}} + \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{G}}\}$ jadi bahwa himpunan sisi-bobot $\{\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{uv}) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{v}) | \boldsymbol{uv} \in \boldsymbol{E}(\boldsymbol{G})\}$ sama dengan himpunan $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} + \boldsymbol{d}, \boldsymbol{a} + \mathbf{2}\boldsymbol{d}, \dots, \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{G}} - \mathbf{1})\boldsymbol{d}\}$ untuk suatu dua bilangan bulat positif $\boldsymbol{a}$ dan $\boldsymbol{d}$. Suatu pelabelan total $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{d})$-sisi-antiajaib $\boldsymbol{\xi}$ disebut *super* jika label titik adalah label terkecil yang mungkin. Pada tahun 2002, peneliti membuktikan bahwa graf $\boldsymbol{P}_{\mathbf{3}} \cup \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{n}}$ dapat dilabeli secara total sisi ajaib super. Dalam penelitian ini, akan dilakukan pelabelan total (a,d) sisi anti ajaib super pada graf $\boldsymbol{P}_{\mathbf{3}} \cup \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{n}}$.

LANDASAN TEORI

Notasi dan Definisi

Graf G adalah pasangan himpunan *(V,E)* dimana *V* adalah himpunan tak kosong dan *E* (mungkin kosong) adalah himpunan pasangan tak terurut dari elemen-elemen *V*. Elemen-elemen dari *V* disebut *titik* dari *G*. Sedangkan elemen-elemen dari *E* disebut *sisi* dari *G*. Himpunan titik dari *G* dinotasikan *V(G)* dan himpunan sisi dari *G* dinotasikan dengan *E(G)* [2]. Misalkan *u* dan *v* dua titik di graf *G*. Titik *u* dikatakan *tetangga* dari titik *v* jika ada sisi yang menghubungkan *u* dan *v*. Sisi seperti ini dinotasikan dengan *uv*. Titik *u* dan *v* dikatakan *menempel* pada sisi *uv*, dan sebaliknya sisi *uv* menempel pada titik *u* dan titik *v*. Sebagai contoh, dalam Gambar 1A. titik v_2 adalah tetangga v_3; dan titik v_2 menempel pada sisi v_1v_2, v_2v_4, dan v_2v_3 [2]. Derajat dari titik *v*, dinotasikan *d(v)*, pada graf *G* adalah banyaknya titik yang bertetangga dengan titik *v*. Dalam Gambar 1A, $d(v_2)=3$ dan $d(v_5)=1$.

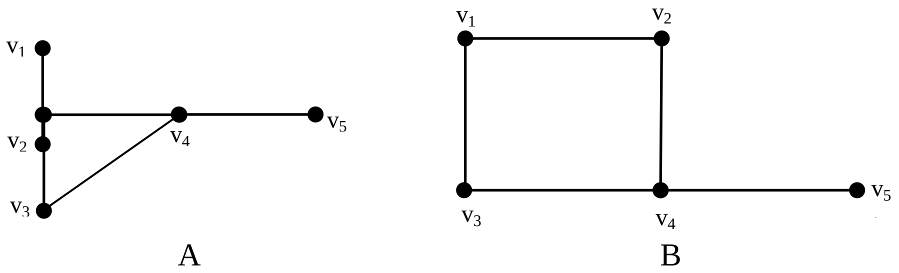
Jalan dari titik *u* ke *v* dengan *panjang n* pada graf *G* adalah suatu barisan $u=v_0,v_1,v_2,\dots,v_{n-1},v_n=v$ sedemikian hingga $v_{i-1}v_i$ adalah sisi di *G* untuk setiap $i=1,2,..,n$. Jalan dikatakan *tertutup* jika $v_0=v_n$, dan dikatakan *terbuka* jika $v_0 \neq v_n$. *Lintasan* adalah suatu jalan yang semua titiknya berbeda. Dalam Gambar 1B, $v_1v_3v_4v_5v_4v_2$ adalah jalan dengan panjang 5, tetapi bukan lintasan; $v_1v_3v_4v_5$ adalah lintasan dengan panjang *3*.

Gabungan dua graf G_1 dan G_2 dinotasikan dengan $G_1 \cup G_2$ adalah graf dengan himpunan titik $V(G_1) \cup V(G_2)$ dan himpunan sisi $E(G_1) \cup E(G_2)$. Sebagai contoh: graf dalam gambar 3 menunjukkan graf *G* adalah gabungan graf G_1 dan G_2. Graf G dikatakan terhubung jika untuk setiap dua titik di G ada lintasan yang menghubungkan kedua titik tersebut. Jika tidak demikian maka graf tersebut disebut graf tidak terhubung. Sebagai contoh, graf pada gambar 1 merupakan graf terhubung dan graf G pada gambar 2 merupakan graf tidak terhubung.

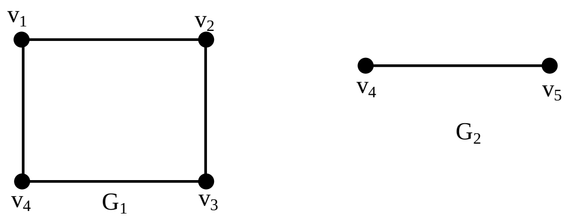
Kelas-Kelas Graf

Graf Lintasan P_n adalah graf terhubung n titik yang terdiri dari tepat dua titik berderajat 1 dan $n-1$ titik berderajat 2. *Graf Lintasan* C_n adalah graf terhubung n titik dengan derajat semua titiknya adalah 2. *Graf roda* W_n adalah graf yang diperoleh dari C_n dengan menambahkan satu titik baru *x* dan menghubungkan titik *x* ke semua titik di C_n. Titik *x* disebut pusat dari graf roda tersebut. *Graf Lengkap* K_n, $n > 1$, adalah graf dengan *n* titik yang setiap dua titiknya saling bertetangga. *Graf Bintang* S_n adalah graf terhubung yang terdiri dari satu titik berderajat $n-1$ dan $n-1$ titik berderajat 1. *Graf Pohon* T_n adalah graf terhubung dengan *n* titik yang tidak memuat lingkaran. *Graf Kipas* F_n, $n \geq 2$, adalah graf yang didapatkan dengan menghubungkan semua titik dari graf lintasan P_n dengan suatu titik yang disebut pusat. Jadi f_n terdiri dari $n-1$ titik dan $2n-1$ sisi. *Graf Bipartit* adalah graf

$G(V_1 \cup V_2, E)$ dengan himpunan titiknya $V(G)$ dapat dipartisi ke dalam dua himpunan bagian $V_1(G)$ dan $V_2(G)$, yakni $V(G)=V_1(G)+V_2(G)$, sedemikian hingga setiap sisi G menghubungkan suatu titik di $V_1(G)$ dengan suatu titik di $V_2(G)$. Jika G memuat semua sisi yang menghubungkan setiap titik di $V_1(G)$ ke semua titik di $V_2(G)$ maka graf G disebut graf bipartite lengkap dan dinotasikan $K_{p,q}$ dimana $p = |V_1(G)|$ dan $q = |V_2(G)|$.



Gambar 1. Graf G



Gambar 2. Graf Tidak Terhubung

Pelabelan Total Sisi-Anti Ajaib

Pelabelan total dalam graf dibagi menjadi dua, yaitu:

1. Pelabelan total sisi adalah pelabelan yang memperhitungkan jumlah label dari satu sisi dan dua titik yang menempel pada sisi trsebut.
2. Pelabelan total titik adalah pelabelan yang memperhitungkan jumlah label dari dua sisi dan satu titik dimana dua sisi tersebut bertemu.

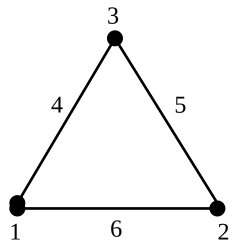
Bobot suatu sisi dari graf G adalah jumlah dari label dua titik yang menempel pada sisi tersebut dan label sisi, yang dinotasikan $\omega_\lambda(xy)$, dengan $\omega_\lambda(xy) = \lambda(x) + \lambda(xy) + \lambda(y)$[1]. *Pelabelan total sisi anti ajaib* pada graf G adalah pemetaan satu-satu dan pada λ dari $V(G) \cup E(G)$ pada $\{1,2,\ldots,p+q\}$ sedemikian hingga $\omega_\lambda(xy) = \lambda(x) + \lambda(xy) + \lambda(y)$ tidak sama untuk setiap $xy \in E(G)$ dan membentuk suatu barisan aritmatik. Jika $\lambda(V(G)) = \{1,2,\ldots,p\}$ maka λ dinamakan *pelabelan total sisi anti ajaib super* [1].

Pelabelan total (a,d) sisi anti ajaib adalah pelabelan pada simpul dan sisi graf dengan $\omega_\lambda(xy) = \lambda(x) + \lambda(xy) + \lambda(y)$ membentuk deret aritmatika $\{a, a+d, a+2d, \ldots, a+(v-1)d\}$, untuk suatu bilangan positif d. Sebagai contoh, Gambar 3 menunjukkan pelabelan total (8,1) sisi anti ajaib super pada graf G.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Berikut adalah hasil yang diperoleh:

Teorema 1: Graf $P_3 \cup P_n$ adalah total $(2n+7,2)$-antiajaib super untuk setiap $4 \leq n \leq 15$.

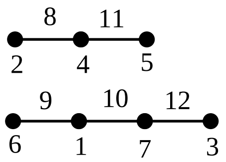


Gambar 3. Contoh Pelabelan total (a,d) sisi anti ajaib.

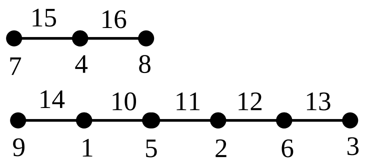
Bukti:

Untuk n genap dan $4 \le n \le 15$, definisikan pelabelan total (a,2) total sisi antiajaib super pada $P_3 \cup P_n$ seperti pada gambar di bawah ini.

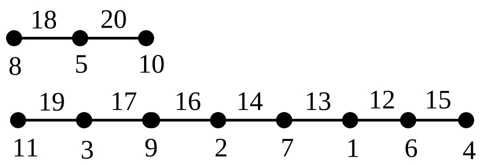
$P_3 \cup P_4$



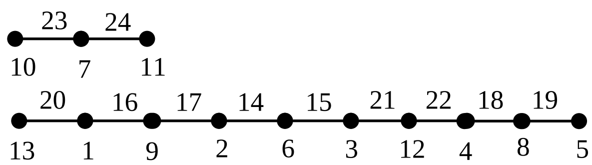
$P_3 \cup P_6$



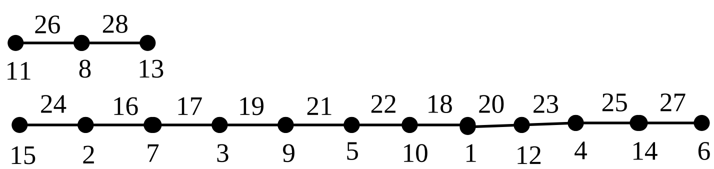
$P_3 \cup P_8$



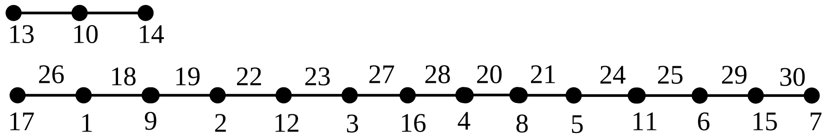
$P_3 \cup P_{10}$



$P_3 \cup P_{12}$



$P_3 \cup P_{14}$



Untuk *n* ganjil ($n = 2k + 1$) dan $4 \leq n \leq 15$, didefinisikan pemetaan λ_2 dimana:
$\lambda_2\ (u_i) = \lambda_1(u_i),\ 1 \leq i \leq 3$
$\lambda_2\ (v_i) = \lambda_1(v_i),\ 1 \leq i \leq n-1$
$\lambda_2\ (v_n) = n + 4$
$\lambda_2\ (v_{n-1}v_n) = 2n + 6$
$\lambda_2\ (e) = \lambda_1(e) + 1,\ e \neq v_{n-1}v_n$
λ_1 : pelabelan total (a ,2) sisi anti ajaib super untuk $P_3 \cup P_{2k}$ seperti pada gambar di atas.

Teorema 2: Untuk $n \equiv 0\ (mod\ 4), n \geq 16$, graf $P_3 \cup P_n$ adalah total $(\frac{3}{2}n + 7{,}2)$ sisi antiajaib super.

Bukti:
Tulis $n = 4r$ dan beri label titik-titk dan sisi-sisi $P_3 \cup P_n$ dengan cara sebagai berikut:

$$\lambda_1\ (u_1) = \frac{1}{4}(3n + 16)$$
$$\lambda_1\ (u_2) = \frac{1}{4}(3n - 4)$$
$$\lambda_1\ (u_3) = \frac{1}{4}(3n + 8)$$

Untuk titik-titik dengan indeks ganjil, definisikan:

$$\lambda_1\ (v_j) = \begin{cases} n+3, & j = 1 \\ \frac{1}{2}(n+j-1), & j = 3,5,\dots,2r-3 \\ \frac{1}{2}(n+j+1), & j = 2r-1, 2r+1 \\ \frac{1}{4}(3n+12), & j = 2r+3 \\ \frac{1}{2}(n+j+5), & j = 2r+5, 2r+7, \dots, 4r-1 \end{cases}$$

Sedangkan untuk titik-titik dengan indeks genap, definisikan:

$$\lambda_1\ (v_j) = \begin{cases} \frac{1}{2}n - 3, & j = 2 \\ \frac{1}{2}j, & j = 4,6,\dots,2r \\ 1, & j = 4r-2 \\ \frac{1}{2}n & j = 4r \end{cases}$$

$$\lambda_1\ (v_j) = \begin{cases} \frac{1}{4}\left(\frac{n}{2} + j + 14\right), & j = 2r+2, 2r+6,\ \ r \equiv 0 \\ \frac{1}{4}\left(\frac{n}{2} + j\right), & j = 2r+4, 2r+8, \quad r \equiv 0 \\ \frac{1}{2}j + 2, & j = 2r+10, 2r+16, \dots, 4r-8, \quad r \equiv 0, r > 6 \\ \frac{1}{2}j + 2, & j = 2r+12, 2r+18, \dots, 4r-6, \quad r \equiv 0, r > 6 \\ \frac{1}{2}j - 4, & j = 2r+14, 2r+20, \dots, 4r-4, \quad r \equiv 0, r > 6 \end{cases}$$

$$\lambda_1(v_j) = \begin{cases} \frac{1}{2}(n-j+8), & j = 2r+2, 2r+4, \quad r \equiv 1 \\ \frac{1}{2}j+2, & j = 2r+6, 2r+12 \dots 4r-8, \quad r \equiv 1, r > 4 \\ \frac{1}{2}j+2, & j = 2r+8, 2r+14, \dots, 4r-6, \quad r \equiv 1, r > 4 \\ \frac{1}{2}j-4, & j = 2r+10, 2r+16, \dots, 4r-4, \quad r \equiv 1, r > 4 \end{cases}$$

$$\lambda_1(v_j) = \begin{cases} \frac{1}{2}(2n-3j+14), & j = 2r+2, 2r+4, \quad r \equiv 2 \\ \frac{1}{4}(n+12), & j = 2r+6, \quad r \equiv 2 \\ \frac{1}{2}j+2, & j = 2r+8, 2r+14, \dots, 4r-8, \quad r \equiv 2, r > 5 \\ \frac{1}{2}j+2, & j = 2r+10, 2r+16, \dots, 4r-6, \quad r \equiv 2, r > 5 \\ \frac{1}{2}j-4, & j = 2r+12, 2r+18, \dots, 4r-4, \quad r \equiv 0, r > 5 \end{cases}$$

Untuk sisi-sisi didefinisikan:

$\lambda_1(u_1u_2) = n+4$

$\lambda_1(u_2u_3) = n+6$

$$\lambda_1(v_jv_{j+1}) = \begin{cases} n+7, & j = 1 \\ 3\frac{n}{2}+9, & j = 2 \\ 2n-j+7, & j = 3, 4, \dots, 2r-3 \\ 2n-j+6, & j = 2r-2, 2r-1, 2r \\ 5\frac{n}{2}-j+2, & j = 4r-3, 4r-2 \\ n+5, & j = n-1 \end{cases}$$

$$\lambda_1(v_jv_{j+1}) = \begin{cases} \frac{1}{4}(5n+2j+6) & j = 2r+1, 2r+3, r \equiv 0,2 \\ \frac{1}{4}(5n+2j+6), & j = 2r+2, 2r+4, r \equiv 0,2 \\ n+j-8, & j = 2r+5, 2r+7, r \equiv 0 \\ n+j-10, & j = 2+6, 2r+8, r \equiv 0 \end{cases}$$

$$\lambda_1(v_jv_{j+1}) = \begin{cases} 2n-j+2 & j = 2r+9, 2r+15, \dots, 4r-9, \quad r \equiv 0, r > 6 \\ 2n-j+2 & j = 2r+10, 2r+16, \dots, 4r-8, \quad r \equiv 0, r > 6 \\ 2n-j+2 & j = 2r+11, 2r+17, \dots, 4r-7, \quad r \equiv 0, r > 6 \\ 2n-j+2 & j = 2r+12, 2r+18, \dots, 4r-6, \quad r \equiv 0, r > 6 \\ 2n-j+8 & j = 2r+13, 2r+19, \dots, 4r-5, \quad r \equiv 0, r > 6 \\ 2n-j+8 & j = 2r+14, 2r+20, \dots, 4r-4, \quad r \equiv 0, r > 6 \end{cases}$$

$$\lambda_1(v_jv_{j+1}) = \begin{cases} \frac{1}{4}(7n-2j+14), & j = 2r+1, 2r+3, \quad r \equiv 1 \\ \frac{1}{4}(7n-2j+8), & j = 2r+2, 2r+4, \quad r \equiv 1 \\ 2n-j+2 & j = 2r+5, 2r+11, \dots, 4r-9, \quad r \equiv 1, r > 4 \\ 2n-j+2 & j = 2r+6, 2r+12, \dots, 4r-8, \quad r \equiv 1, r > 4 \\ 2n-j+2 & j = 2r+7, 2r+13, \dots, 4r-7, \quad r \equiv 1, r > 4 \\ 2n-j+2 & j = 2r+8, 2r+14, \dots, 4r-6, \quad r \equiv 1, r > 4 \\ 2n-j+8 & j = 2r+9, 2r+15, \dots, 4r-5, \quad r \equiv 1, r > 4 \\ 2n-j+8 & j = 2r+10, 2r+16, \dots, 4r-4, \quad r \equiv 1, r > 4 \end{cases}$$

$$\lambda_1\left(v_jv_{j+1}\right)=\begin{cases}2n-j+4, & j=2r+5,2r+6, \quad r\equiv 2\\ 2n-j+2 & j=2r+7,2r+13,\dots,4r-9, \quad r\equiv 2, r>5\\ 2n-j+2 & j=2r+8,2r+14,\dots,4r-8, \quad r\equiv 2, r>5\\ 2n-j+2 & j=2r+9,2r+15,\dots,4r-7, \quad r\equiv 2, r>5\\ 2n-j+2 & j=2r+10,2r+16,\dots,4r-6, \quad r\equiv 2, r>5\\ 2n-j+8 & j=2r+11,2r+17,\dots,4r-5, \quad r\equiv 2, r>5\\ 2n-j+8 & j=2r+12,2r+18,\dots,4r-4, \quad r\equiv 2, r>5\end{cases}$$

Catatan: $r\equiv s$, dihitung dalam modulo 3.
Dari pelabelan titik-titik dan sisi-sisi di atas dapat diperiksa bahwa graf $P_3\cup P_n$ total sisi antiajaib super dengan beda dua.

Teorema 3: Untuk $n\equiv 1\ (mod\ 4), n\geq 17$, graf $P_3\cup P_n$ adalah total $(\frac{3}{2}n+\frac{13}{2},2)$ sisi antiajaib super.

Bukti:
Beri label titik-titk dan sisi-sisi $P_3\cup P_n$ dengan cara sebagai berikut:
$\lambda_2\ (u_i)=\lambda_1(u_i),\ i=1,2,3$
$\lambda_2\ (u_{n-1}u_n)=\lambda_1\ (u_{n-1}u_n)$+1, $i=2,3$
$\lambda_2\ (v_i)=\lambda_1(v_i),\ i=1,2,\dots,n-1$
$\lambda_2\ (v_n)=n+4$
$\lambda_2\ (v_{n-1}v_n)=2n+6$
$\lambda_2\ (e)=\lambda_1(e)+1,\ e\neq v_{n-1}v_n$
Dari pelabelan titik-titik dan sisi-sisi di atas dapat diperiksa bahwa graf $P_3\cup P_n$ total sisi anti ajaib super dengan beda dua.

Teorema 4: Untuk $n\equiv 2\ (mod\ 4), n\geq 18$, graf $P_3\cup P_n$ adalah total $(\frac{n}{2}n+7,2)$ sisi antiajaib super.

Bukti:
Tulis $n=4r+14$ dan beri label titik-titik dan sisi-sisi $P_3\cup P_n$ dengan cara sebagai berikut:

$$\lambda_1\ (u_1)=\frac{1}{4}(3n+10)$$

$$\lambda_1\ (u_2)=\frac{1}{4}(3n-2)$$

$$\lambda_1\ (u_3)=\frac{1}{4}(3n+14)$$

$$\lambda_1\left(v_j\right)=\begin{cases}n+3, & j=1\\ \frac{j}{2}. & j=2,4,,\dots,n\\ \frac{1}{2}(n+j+1), & j=\ 3,5,\dots,2r+3\\ \frac{1}{4}(3n+2), & j=2r+7\\ \frac{1}{4}(3n+6), & j=2r+9\\ \frac{n}{2}+1, & j=n-5\end{cases}$$

$$\lambda_1(v_j) = \begin{cases} \frac{1}{2}(3j-n+25), & j = n-9, n-7, \ r \equiv 0 \\ \frac{1}{2}(n+j+15), & j = 2r+5, 2r+11, \ldots, 4r-1, r \equiv 0 \\ \frac{1}{2}(n+j+3), & j = 2r+13, 2r+19, \ldots, 4r+1, r \equiv 0, r > 3 \\ \frac{1}{2}(n+j+3), & j = 2r+15, 2r+21, \ldots, 4r+3, r \equiv 0, r > 3 \\ \frac{1}{2}(3j-n+5), & j = n-3, n-1, \ r \equiv 0, \end{cases}$$

$$\lambda_1(v_j) = \begin{cases} \frac{1}{2}(n+j+15), & j = 2r+5, 2r+11 \ldots 4r+3, \quad r \equiv 1, \\ \frac{1}{2}(n+j+3), & j = 2r+13, 2r+19, \ldots, 4r+11, \quad r \equiv 1 \\ \frac{1}{2}(n+j+3), & j = 2r+15, 2r+21, \ldots, 4r+13, \quad r \equiv 1, \end{cases}$$

$$\lambda_1(v_j) = \begin{cases} \frac{1}{2}(n+j+15), & j = 2r+5, 2r+11, \ldots, 4r-1, \ r \equiv 2 \\ \frac{1}{2}(n+j+3), & j = 2r+13, 2r+19, \ldots, 4r+3, r \equiv 2, r > 2 \\ \frac{1}{2}(n+j+3), & j = 2r+15, 2r+21, \ldots, 4r+5, r \equiv 2, r > 2 \\ \frac{1}{2}(n+j+7), & j = n-7, n-3, \quad r \equiv 2, \\ n-1 & j = n-1, \ r \equiv 2, \end{cases}$$

Label sisi-sisi didefinisikan:

$\lambda_1(u_1u_2) = 2n+5$

$\lambda_1(u_2u_3) = 2n+4$

$$\lambda_1(v_jv_{j+1}) = \begin{cases} 3\frac{n}{2}+3, & j = 1 \\ 2n-j+6, & j = 2,3, \ldots, 2r+3 \\ 2n-j+6, & j = 2r+6, 2r+7, 2r+8, 2r+9 \\ 5\frac{n}{2}-j+3, & j = n-6, n-5 \\ 2n-j-1, & j = 2r+4, 2r+10, \ldots, 4r-2, r \equiv 0 \\ 2n-j-1 & j = 2r+5, 2r+11, \ldots, 4r-1, r \equiv 0 \end{cases}$$

$$\lambda_1(v_jv_{j+1}) = \begin{cases} 2n-j+5 & j = 2r+12, 2r+18, \ldots, 4r, r \equiv 0, r > 3 \\ 2n-j+5 & j = 2r+13, 2r+19, \ldots, 4r+1, r \equiv 0, r > 3 \\ 2n-j+5 & j = 2r+14, 2r+20, \ldots, 4r+2, r \equiv 0, r > 3 \\ 2n-j+5 & j = 2r+15, 2r+21, \ldots, 4r+3, r \equiv 0, r > 3 \\ 3n-2j-7, & j = n-10, n-8, \quad r \equiv 0 \\ 3n-2j-6, & j = n-9, n-7, r \equiv 0 \\ 3n-2j+3, & j = n-4, n-2, r \equiv 0 \\ 3n-2j+4, & j = n-3, n-1, r \equiv 0 \end{cases}$$

$$\lambda_1(v_jv_{j+1}) = \begin{cases} 2n-j+1 & j = 2r+4, 2r+10, \ldots, 4r+2, \quad r \equiv 1 \\ 2n-j+1 & j = 2r+5, 2r+11, \ldots, 4r+3, \quad r \equiv 1 \\ 2n-j+5 & j = 2r+12, 2r+18, \ldots, 4r+10, \quad r \equiv 1 \\ 2n-j+5 & j = 2r+13, 2r+19, \ldots, 4r+11, \quad r \equiv 1 \\ 2n-j+5 & j = 2r+14, 2r+20, \ldots, 4r+12, \quad r \equiv 1 \\ 2n-j+5 & j = 2r+15, 2r+21, \ldots, 4r+13, \quad r \equiv 1 \end{cases}$$

$$\lambda_1\left(v_jv_{j+1}\right)=\begin{cases}2n-j-1 & j=2r+4,2r+10,\ldots,4r,\ \ r\equiv 2\\ 2n-j-1 & j=2r+5,2r+11,\ldots,4r+1,\quad r\equiv 2\\ 2n-j+3 & j=n-8,n-7,\quad r\equiv 2\\ j+11 & j=n-4,n-2,\quad r\equiv 2\\ j+9 & j=n-3,n-1,\ \ r\equiv 2\end{cases}$$

$$\lambda_1\left(v_jv_{j+1}\right)=\begin{cases}2n-j+5 & j=2r+12,2r+18,\ldots,4r+2,r\equiv 2,r>2\\ 2n-j+5 & j=2r+13,2r+19,\ldots,4r+3,r\equiv 2,r>2\\ 2n-j+5 & j=2r+14,2r+20,\ldots,4r+4,r\equiv 2,r>2\\ 2n-j+5 & j=2r+15,2r+21,\ldots,4r+5,r\equiv 2,r>2\end{cases}$$

Catatan: $r\equiv s$, dihitung dalam modulo 3. Dari pelabelan titik-titik dan sisi-sisi di atas dapat diperiksa bahwa graf $P_3\cup P_n$ total sisi anti ajaib super dengan beda dua.

Teorema 5: Untuk $n\equiv 3\ (mod\ 4), n\geq 19,$ graf $P_3\cup P_n$ adalah total $(\frac{n}{2}n+\frac{13}{2},2)$ sisi antiajaib super.

Bukti:
Beri label titik-titk dan sisi-sisi $P_3\cup P_n$ dengan cara sebagai berikut:
$\lambda_2\ (u_i)=\lambda_1(u_i),\ i=1,2,3$
$\lambda_2\ (u_{n-1}u_n)=\lambda_1\ (u_{n-1}u_n)$+1, $i=2,3$
$\lambda_2\ (v_i)=\lambda_1(v_i),\ i=1,2,\ldots,n-1$
$\lambda_2\ (v_n)=n+4$
$\lambda_2\ (v_{n-1}v_n)=2n+6$
$\lambda_2\ (e)=\lambda_1(e)+1,\ e\neq v_{n-1}v_n$
λ_1 adalah pelabelan total sisi anti ajaib super pada teorema 1.

KESIMPULAN

Studi mengenai pelabelan gaf akhir-akhir ini mendapatkan banyak perhatian, khususnya mengenai pelabelan toal sisi antia ajaib super. Lebih khusus penelitian ini adalah pelabelan total (a,d) sisi anti ajaib super pada graf tidak terhubung $P_3\cup P_n$. Hasil utama penelitian ini terdapat pada teorema 1, 2, 3, 4 dan 5.

REFERENSI

[1] Baca, Martin, dan Miller, Mirka (2008), *Super Edge-Antimagic Graph*, *A Wealth of Problems and Some Solutions*. Brown Walker Press.

[2] Bondy, J. A. dan Murty, U. S. R. (1976), *Graph Theory With Applications.* The Macmillan Press.

[3] Hartsfield, N. danRingel, G. (1990), *Pearls in Graph Theory*, Academic Press, San Diego.

[4] Miller, Mirka (2000), Open Problems in Graph Theory: Labeling and Extremal Graph. *Prosiding Konferensi Nasional Himpunan Matematika Indonesia X*, Institut Teknologi Bandung, 17-20 Juli.

[5] Nur Inayah, A.N.M. Salman, R. Simanjuntak (2009), On $(a.d)$-H-antimagic Coverings of Graph. *The Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing* 71, 273-281.

[6] A. Kotzig dan A. Rosa, *Magic Valuation of Finite Graphs, Canad. Math. Bull. 13, 451-461.*