

PEMBENTUKAN DISTRIBUSI *TRANSMUTED EXPONENTIATED EXPONENTIAL* MENGGUNAKAN METODE *QUADRATIC RANK TRANSMUTATION MAP* (QRTM)

Siti Nurrohmah, Ida Fithriani, dan Ridho Okta Pawarestu

Departemen Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam,
Universitas Indonesia

Email: snurrohmah@sci.ui.ac.id, idha.fithriani@gmail.com, ridho.okta@sci.ui.ac.id

Abstract: Transmuted Exponentiated Exponential distribution is a generalization of Exponentiated Exponential distribution which is generated using a method called Quadratic Rank Transmutation Maps (QRTM). Transmuted Exponentiated Exponential distribution is a continued distribution which can model increasing, decreasing, bathtub, and non-monotone hazard rate. In this paper, it will be explained how to generate Transmuted Exponentiated Exponential distribution and also characteristics of distribution such as, probability density function, distribution function, and hazard rate.

Keywords: Exponentiated Exponential distribution, Transmuted Exponentiated Exponential distribution, Quadratic Rank Transmutation Maps (QRTM), hazard rate.

Abstrak: Distribusi *Transmuted Exponentiated Exponential* merupakan generalisasi dari distribusi *Exponentiated Exponential* yang dibentuk dengan menggunakan metode *Quadratic Rank Transmutation Maps* (QRTM). Distribusi *Transmuted Exponentiated Exponential* merupakan salah satu distribusi kontinu yang mampu memodelkan data dengan *hazard rate* naik, turun, *bathtub*, dan non-monoton. Pada penulisan ini akan dibahas mengenai proses pembentukan distribusi *Transmuted Exponentiated Exponential* serta karakteristik-karakteristik dari distribusi yang meliputi fungsi kepadatan probabilitas, fungsi distribusi, dan *hazard rate*.

Kata kunci: distribusi *Exponentiated Exponential*, distribusi *Transmuted Exponentiated Exponential*, metode *Quadratic Rank Transmutation Maps* (QRTM), *hazard rate*.

PENDAHULUAN

Dalam perkembangannya, data yang terkait dengan kejadian yang muncul di berbagai bidang kehidupan, seperti lingkungan, finansial, kesehatan, dan sebagainya semakin beragam dan kompleks. Keadaan ini menyebabkan distribusi probabilitas yang sudah dikenal sebelumnya seperti distribusi Gamma dan Weibull kurang tepat apabila digunakan untuk menggambarkan data tersebut, sehingga menuntut adanya pengembangan dari distribusi-distribusi yang telah dikenal.

Pada tahun 1998, Gupta dan Kundu memperkenalkan sebuah distribusi baru, yaitu distribusi *Exponentiated Exponential* (EE) [1]. Distribusi *Exponentiated Exponential* dapat dijadikan sebuah alternatif dari distribusi Gamma atau distribusi Weibull. Seperti halnya distribusi Gamma dan distribusi Weibull, distribusi ini juga memiliki parameter *shape* dan

scale. Kebanyakan karakteristik dari distribusi *Exponentiated Exponential* mirip dengan karakteristik yang dimiliki oleh distribusi Gamma, tetapi secara komputasi dan perhitungan fungsi distribusinya mirip dengan distribusi Weibull. Fungsi distribusi dari distribusi *Exponentiated Exponential* memiliki bentuk eksplisit seperti pada distribusi Weibull, namun karakteristik seperti *hazard rate* memiliki kemiripan dengan distribusi Gamma. Tetapi distribusi ini juga memiliki kekurangan, yaitu tidak mampu menggambarkan kejadian yang mempunyai *hazard rate* yang bukan merupakan fungsi monoton atau berbentuk *bathtub*. *Hazard rate* merupakan *rate* suatu individu mengalami *event* sesaat setelah suatu waktu tertentu. *Hazard rate* memiliki berbagai bentuk, contohnya bentuk *bathtub* yang dijumpai pada siklus hidup manusia, dimana pada awal kelahiran, risiko untuk terjadi kematian cukup tinggi, namun akan menurun saat memasuki usia remaja hingga dewasa, dan pada akhirnya risiko kematian akan kembali tinggi di usia tua.

Oleh karena itu, untuk melengkapi kekurangan yang dimiliki oleh distribusi *Exponentiated Exponential*, Shaw dan Buckley pada tahun 2007 mengajukan teknik baru dalam pembentukan keluarga distribusi baru, yaitu keluarga distribusi *Transmuted* [3]. Dalam banyak literatur, teknik ini disebut *Transmutation*. *Transmutation* merupakan fungsi komposisi dari suatu fungsi distribusi dengan invers dari fungsi distribusi lainnya. Teknik ini memanfaatkan *Quadratic Rank Transmutation Map* (QRTM) untuk membangkitkan kelas distribusi baru yang memberikan fleksibilitas yang lebih dalam memodelkan berbagai macam data.

Dalam makalah ini akan dibahas penggunaan metode QRTM dalam pembentukan distribusi *Transmuted Exponentiated Exponential* (TEE). Distribusi ini dibangun dengan menerapkan teknik *transmutation* pada distribusi *Exponentiated exponential*. Distribusi *Transmuted Exponentiated Exponential* mempunyai fungsi hazard yang mampu menggambarkan bentuk *bathtub*, yang tidak dimiliki oleh distribusi *Exponentiated Exponential*.

TINJAUAN PUSTAKA

Distribusi Exponentiated Exponential

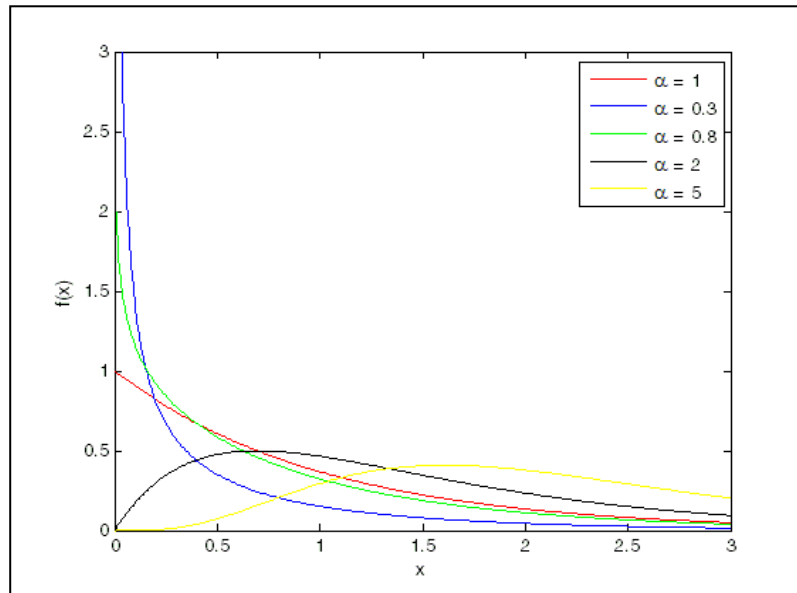
Distribusi *Exponentiated Exponential* diperkenalkan oleh Gupta dan Kundu yang pada awalnya digunakan sebagai alternatif dari distribusi Gamma dan distribusi Weibull [1]. Distribusi ini juga merupakan generalisasi dari distribusi *Exponential*. Distribusi ini digunakan untuk menganalisis data yang nilainya positif, seperti halnya distribusi Gamma dan distribusi Weibull. Contohnya dapat dijumpai pada sistem pendingin ruangan di suatu pesawat terbang, dimana peubah acak dari distribusi *Exponentiated Exponential* menyatakan lama hidup dari pendingin ruangan tersebut.

Karakteristik Distribusi Exponentiated Exponential

Bentuk fungsi kepadatan probabilitas (fkp) dari distribusi *Exponentiated Exponential* adalah

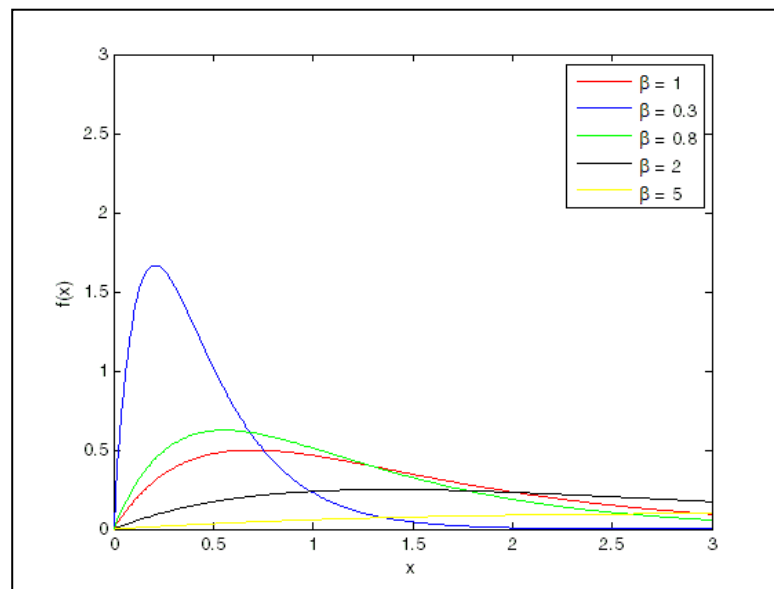
$$f(x) = \frac{\alpha}{\beta} (1 - e^{-x/\beta})^{\alpha-1} e^{-x/\beta},$$

dimana $\alpha, \beta > 0$, dan $x > 0$, dengan grafik sebagai berikut:



Gambar 1. Grafik fkp distribusi *Exponentiated Exponential* ketika $\beta = 1$ dan α bervariasi.

Dari gambar 1 dapat dilihat bahwa nilai α yang berbeda akan menghasilkan suatu bentuk grafik yang berbeda pada grafik fkp distribusi *Exponentiated Exponential*. Sehingga parameter α merupakan parameter *shape* untuk distribusi *Exponentiated Exponential*.



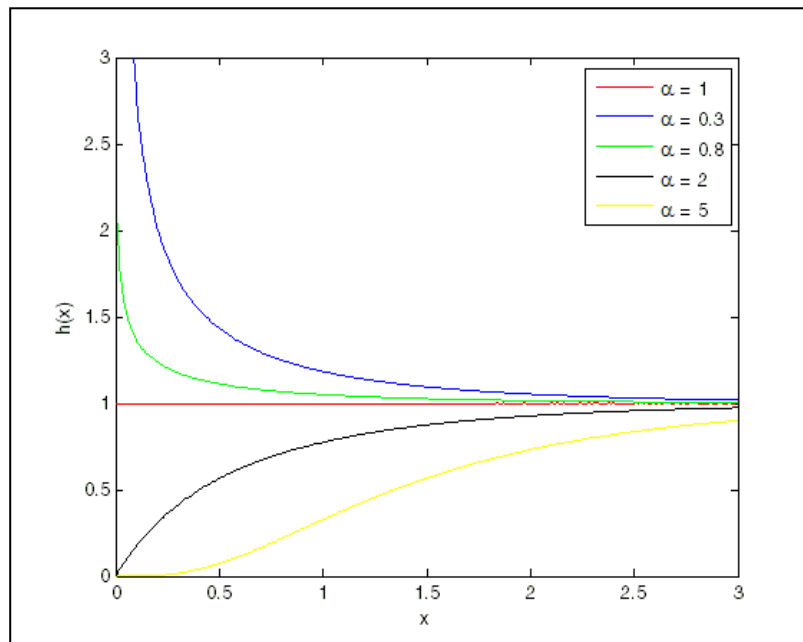
Gambar 2. Grafik fkp distribusi *Exponentiated Exponential* ketika $\alpha = 2$ dan β bervariasi

Sedangkan dari gambar 2 dapat dilihat bahwa nilai β yang berbeda akan menghasilkan tingkat kerentangan yang berbeda pada grafik fkp distribusi *Exponentiated Exponential*. Sehingga parameter β merupakan parameter *scale* untuk distribusi *Exponentiated Exponential*.

Sedangkan fungsi distribusi dan fungsi *hazard* dari distribusi *Exponentiated Exponential* adalah

$$F(x) = (1 - e^{-x/\beta})^\alpha \text{ dan } h(x) = \frac{\alpha (1 - e^{-x/\beta})^{\alpha-1} e^{-x/\beta}}{1 - (1 - e^{-x/\beta})^\alpha}$$

dimana $\alpha, \beta > 0$, dan $x > 0$, dengan grafik fungsi hazard adalah sebagai berikut:



Gambar 3. Grafik fungsi *hazard* distribusi *Exponentiated Exponential* ketika $\beta = 1$ dan α bervariasi

Berdasarkan gambar 3 di atas, fungsi *hazard* dari distribusi *Exponentiated Exponential* memiliki beberapa bentuk. Untuk nilai $\alpha = 1$, fungsi *hazard* dari distribusi *Exponentiated Exponential* merupakan fungsi konstan seperti pada fungsi *hazard* dari distribusi *Exponential*. Untuk nilai $\alpha < 1$, fungsi *hazard* merupakan fungsi turun, sedangkan untuk nilai $\alpha > 1$, merupakan fungsi naik. Tetapi distribusi *Exponentiated Exponential* belum mampu menggambarkan fenomena fungsi *hazard* berbentuk *bathtub*.

METODOLOGI PENELITIAN

Metode *Quadratic Rank Transmutation Map* (QRTM)

Metode QRTM ini diperkenalkan oleh Shaw dan Buckley sekitar tahun 2009 [3]. Metode ini menambahkan satu parameter pada distribusi dasar, sehingga diharapkan distribusi baru yang terbentuk akan menjadi lebih fleksibel untuk menganalisis data. Parameter yang ditambahkan disebut sebagai parameter *transmuted*.

Transmutation Maps

Transmutation Maps didefinisikan sebagai suatu fungsi komposisi dari fungsi distribusi kumulatif suatu distribusi dengan invers dari fungsi distribusi kumulatif dari distribusi lain. Dalam beberapa referensi, invers dari fungsi distribusi kumulatif untuk variabel acak kontinu sering juga disebut sebagai fungsi kuantil dari suatu distribusi.

Rank Transmutation Maps

Transmutation Maps terbagi menjadi dua kasus, yang pertama adalah *Sample Transmutation Maps*, yang didefinisikan sebagai fungsi komposisi dari fungsi distribusi kumulatif terhadap fungsi kuantil dari distribusi lainnya, dinotasikan dengan $y = G^{-1}[F(x)]$. Sedangkan yang kedua adalah *Rank Transmutation Maps*, didefinisikan sebagai fungsi komposisi dari fungsi kuantil distribusi terhadap fungsi distribusi kumulatif dari distribusi lainnya, dinotasikan dengan $v = G[F^{-1}(x)]$. Kasus yang digunakan dalam metode QRTM adalah *Rank Transmutation Maps*.

Quadratic Rank Transmutation Maps

Berikut ini akan didefinisikan *rank transmutation maps* secara umum. Misalkan F_1 merupakan fungsi distribusi kumulatif dari distribusi dasar dan F_2 merupakan fungsi distribusi yang akan dibentuk. Kondisi yang harus dipenuhi yaitu F_1 dan F_2 harus memiliki ruang sampel yang sama. Kemudian dapat dibentuk *General Rank Transmutation maps* sebagai $G_{R_{1,2}}(u) = F_2(F^{-1}(u))$.

Pemetaan ini memetakan interval $[0,1]$ ke dirinya sendiri, dan diasumsikan bahwa pemetaan ini kontinu dan monoton. *Quadratic Rank Transmutation* merupakan salah satu contoh dari *rank transmutation* dan didefinisikan sebagai

$$G_{R_{1,2}}(u) = u + \lambda u(1 - u), \quad |\lambda| \leq 1. \quad (1)$$

Distribusi Transmuted

Distribusi *transmuted* diperoleh dengan cara melakukan proses substitusi pada persamaan (1), sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} G_{R_{1,2}}(u) &= u + \lambda u(1 - u) \\ F_2(F_1^{-1}(u)) &= u + \lambda u(1 - u) \\ F_2(F_1^{-1}(u)) &= u + \lambda u - \lambda u^2 \end{aligned}$$

Misalkan $F_1(x) = u$, maka $F_1^{-1}(u) = x$, untuk $u \in [0,1]$ dan $x > 0$. Sehingga

$$\begin{aligned} F_2(F_1^{-1}(u)) &= u + \lambda u - \lambda u^2 \\ F_2(x) &= F_1(x) + \lambda F_1(x) - \lambda [F_1(x)]^2 \\ F_2(x) &= (1 + \lambda)F_1(x) - \lambda [F_1(x)]^2. \end{aligned} \quad (2)$$

Definisi 1 Suatu peubah acak X dikatakan berdistribusi *transmuted* jika fungsi distribusi kumulatifnya memenuhi persamaan

$$G(x) = (1 + \lambda)F(x) - \lambda F^2(x), \text{ untuk } |\lambda| \leq 1. \quad (3)$$

dimana $F(x)$ merupakan fungsi distribusi kumulatif dari distribusi dasar, dan $G(x)$ disebut sebagai *modulated distribution* atau distribusi yang akan dibentuk [3].

Berdasarkan fungsi distribusi $G(x)$, fungsi kepadatan probabilitas dari distribusi *transmuted* adalah : $g(x) = G'(x) = f(x)[(1 + \lambda) - 2\lambda F(x)]$.

Konstruksi Distribusi *Transmuted Exponentiated Exponential*

Sebelumnya telah diketahui bahwa jika X merupakan peubah acak kontinu dari distribusi *Exponentiated Exponential* dengan parameter α dan β yang bernilai positif, maka fungsi kepadatan probabilitasnya adalah $f(x, \alpha, \beta) = \frac{\alpha}{\beta} (1 - e^{-x/\beta})^{\alpha-1} e^{-x/\beta}$ sehingga fungsi distribusinya adalah $F(x, \alpha, \beta) = (1 - e^{-x/\beta})^\alpha$. Untuk memperoleh fungsi distribusi dari distribusi *Transmuted Exponentiated Exponential*, dilakukan substitusi fungsi distribusi dari distribusi *Exponentiated Exponential* ke dalam (3) dimana distribusi *Exponentiated Exponential* berperan sebagai distribusi dasar, dengan hasil sebagai berikut [2]:

$$G(x) = (1 + \lambda)(1 - e^{-x/\beta})^\alpha - \lambda \left[(1 - e^{-x/\beta})^\alpha \right]^2 = (1 - e^{-x/\beta})^\alpha [(1 + \lambda) - \lambda(1 - e^{-x/\beta})^\alpha] \mid \lambda \leq 1.$$

Jadi fungsi distribusi dari distribusi *Transmuted Exponentiated Exponential* adalah

$$G(x) = (1 - e^{-x/\beta})^\alpha [(1 + \lambda) - \lambda(1 - e^{-x/\beta})^\alpha], \tag{4}$$

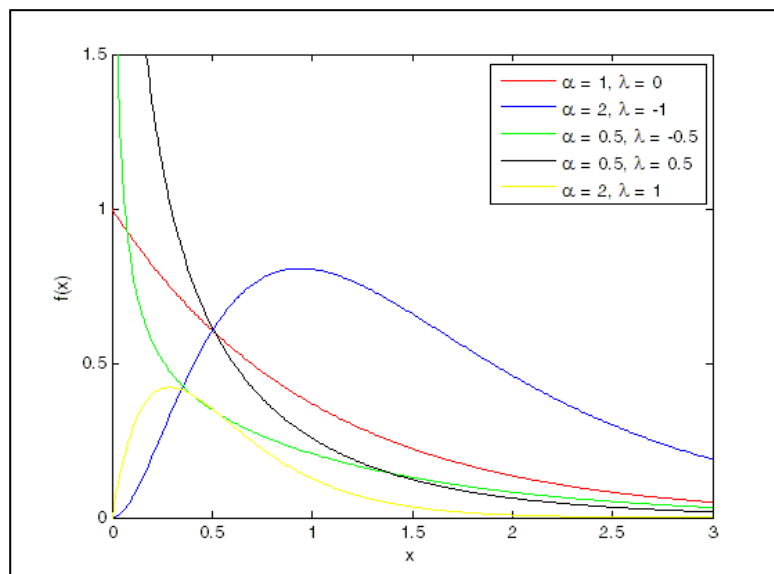
dimana $x, \alpha, \beta > 0, \mid \lambda \mid \leq 1$.

Berdasarkan (4), diperoleh fungsi kepadatan probabilitas dari distribusi *Transmuted Exponentiated Exponential* dengan parameter α, β , dan λ adalah

$$g(x) = G'(x) = \frac{\alpha}{\beta} (1 - e^{-x/\beta})^{\alpha-1} e^{-x/\beta} [(1 + \lambda) - 2\lambda(1 - e^{-x/\beta})^\alpha], \tag{5}$$

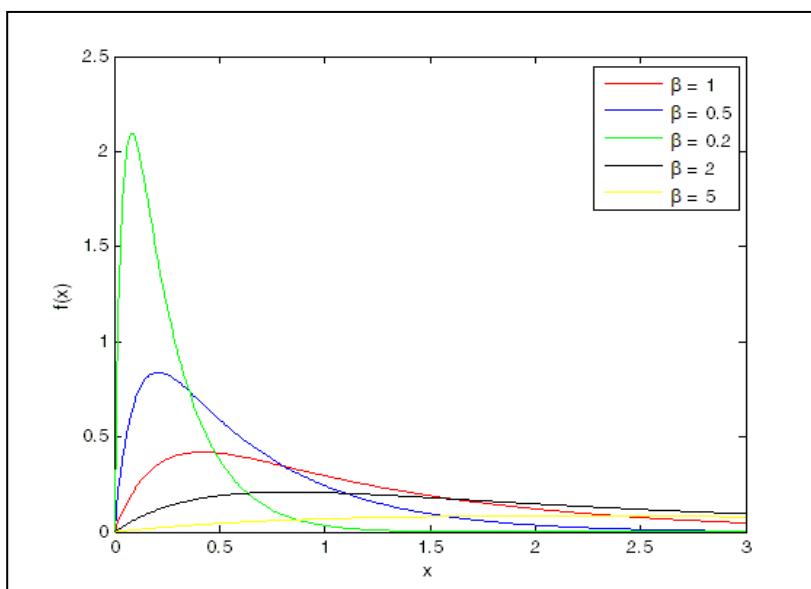
dimana $x, \alpha, \beta > 0, \mid \lambda \mid \leq 1$.

Berikut ini diberikan beberapa grafik fungsi kepadatan probabilitas dari distribusi *Transmuted Exponentiated Exponential* berdasarkan perubahan nilai-nilai dari parameter.



Gambar 4. Grafik fkp distribusi *Transmuted Exponentiated Exponential* ketika $\beta = 1$ dan α, λ bervariasi.

Dari gambar 4 dapat dilihat bahwa nilai α yang berbeda akan menghasilkan suatu bentuk grafik yang berbeda pada grafik fkp distribusi *Transmuted Exponentiated Exponential*. Sehingga parameter α merupakan parameter *shape* untuk distribusi *Transmuted Exponentiated Exponential*.



Gambar 5 Grafik fkp distribusi *Transmuted Exponentiated Exponential* ketika $\alpha = 2$, $\lambda = 0.5$, dan β bervariasi.

Sedangkan dari gambar 5 dapat dilihat bahwa nilai β yang berbeda akan menghasilkan tingkat kerentangan yang berbeda pada grafik fkp distribusi *Transmuted Exponentiated Exponential*. Sehingga parameter β merupakan parameter *scale* untuk distribusi *Transmuted Exponentiated Exponential*.

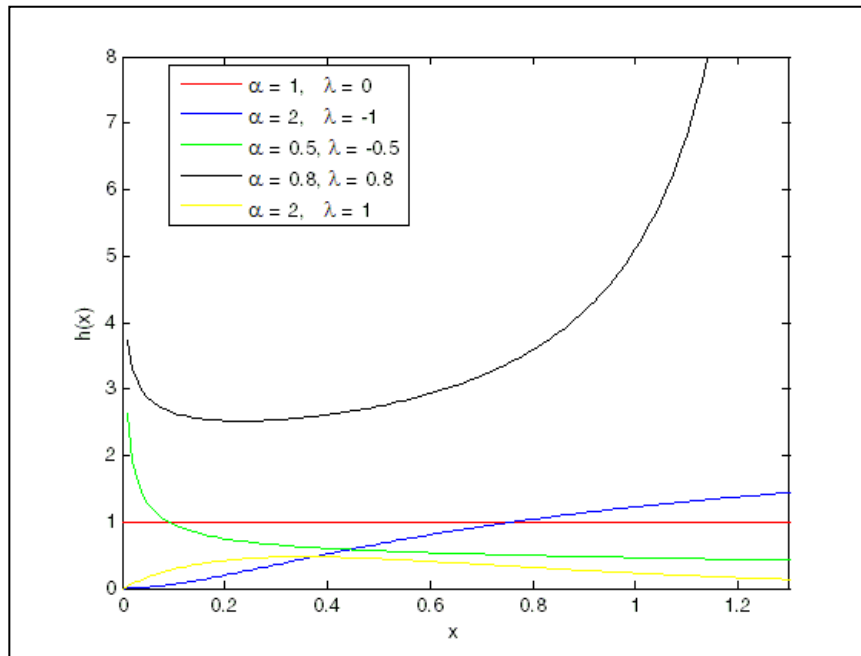
Fungsi Hazard

Fungsi *hazard* menyatakan rate suatu objek mengalami kegagalan sesaat setelah x . Fungsi *hazard* dari distribusi *Transmuted Exponentiated Exponential* dengan parameter α, β , dan λ adalah

$$h(x) = \frac{g(x)}{1 - G(x)} = \frac{\frac{\alpha}{\beta} (1 - e^{-x/\beta})^{\alpha-1} e^{-x/\beta} [(1 + \lambda) - 2\lambda(1 - e^{-x/\beta})^\alpha]}{1 - (1 - e^{-x/\beta})^\alpha [(1 + \lambda) - \lambda(1 - e^{-x/\beta})^\alpha]}$$

dimana $x, \alpha, \beta > 0, |\lambda| \leq 1$.

Beberapa grafik fungsi hazard dari distribusi *Transmuted Exponentiated Exponential* disajikan pada gambar 6. Berdasarkan gambar 6, fungsi *hazard* dari distribusi *Transmuted Exponentiated Exponential* memiliki beberapa bentuk. Untuk nilai $\alpha = 1$ dan $\lambda = 0$, fungsi *hazard* dari distribusi *Transmuted Exponentiated Exponential* merupakan fungsi konstan seperti pada fungsi *hazard* dari distribusi *Exponential*. Fungsi *hazard* dari distribusi *Transmuted Exponentiated Exponential* dapat berbentuk fungsi naik, fungsi turun, dan bahkan mampu menggambarkan fenomena fungsi *hazard* berbentuk *bathtub* dan *inverted bathtub*. Sehingga distribusi *Transmuted Exponentiated Exponential* dikatakan cukup fleksibel dalam analisis data positif, karena mampu menggambarkan berbagai fenomena fungsi *hazard*.



Gambar 6 Grafik fungsi *hazard* distribusi *Transmuted Exponentiated Exponential* ketika $\beta = 1$, α dan λ bervariasi.

KESIMPULAN

Berdasarkan hasil pembahasan di atas, diperoleh kesimpulan sebagai berikut :

1. Distribusi *Transmuted Exponentiated Exponential* dibangun dengan menggunakan metode *Quadratic Rank Transmutation Maps* (QRTM) dimana distribusi *Exponentiated Exponential* bertindak sebagai distribusi dasar.
2. Distribusi *Transmuted Exponentiated Exponential* merupakan distribusi kontinu yang memiliki tiga parameter.
3. Distribusi *Transmuted Exponentiated Exponential* merupakan distribusi skala dengan parameter β sebagai parameter *scale*.
4. Distribusi *Transmuted Exponentiated Exponential* mampu menggambarkan berbagai bentuk fungsi *hazard* seperti naik, turun, *bathtub*, dan non-monoton.

REFERENSI

- [1] Gupta, D. Rameshwar, & Kundu, Debasis. (2001). *Exponentiated Exponential Family : An Alternative to Gamma and Weibull Distributions*. *Biometrical Journal* 43 1, 117-130.
- [2] Merovci, Faton. (2013). *Transmuted Exponentiated Exponential Distribution*. *Mathematical Sciences and Application E-Notes Volume 1*, 112-122.
- [3] Shaw, T. William, & Buckley, R.C Ian. (2009). *The Alchemy of Probability : Beyond Gram-Charlier Expansions, and a Skew-kurtotic-normal Distribution From a Rank Transmutation Map*. arXiv: 0901.0434v1.