Jurnal "LOG!K@" , Jilid 6, No. 1, 2016, Hal. 23 - 31
ISSN 1978 – 8568

PELABELAN TOTAL SISI-AJAIB SUPER PADA GRAF $P_3 \cup P_n$

Yanne Irene
Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi,
Universitas Islam Negeri Syarif Hidayatullah Jakarta
Email : yanne.irene@uinjkt.ac.id

Abstract: Let *G* be a graph with p vertices and q edges. An *edge-magic total labelling* on graph G is one-to-one mapping λ from $V(G) \cup E(G)$ onto the set $\{1,2,3,\dots,p+q\}$ such that there exists a constant k satisfying:

$$\lambda(x) + \lambda(xy) + \lambda(y) = k$$

For each edge xy in *G*. If $\lambda(V(G)) = \{1,2,\dots,p\}$ then λ called *super edge-magic total labeling.* In thisarticle we show that disconnected graph $P_3 \cup P_n$is super edge-magic, where P_n is a path with *n* vertices.
Keywords: Edge-magic total labelling, super edge-magic total labelling, disconnected graph, path.

Abstrak: Misalkan *G* adalah graf dengan *p* titik dan *q* sisi. Pelabelan *total sisi-ajaib* pada graf *G* adalah pemetaan satu-satu dan pada λ dari $V(G) \cup E(G)$ pada $\{1,2,\dots,p+q\}$ sedemikian sehingga himpunan untuk suatu konstanta k berlaku:

$$\lambda(x) + \lambda(xy) + \lambda(y) = k$$

untuk setiap sisi xy di *G*. Jika $\lambda\big(V(G)\big) = \{1,2,\dots,p\}$ maka λ dinamakan *pelabelan total sisi-ajaib super*. Pada artikel ini akan ditunjukkan pealbelan total sisi –ajaib super pada graf tidak terhubung $P_3 \cup P_n$, dimana P_n adalah graf lintasan dengan n titik
Kata kunci: Pelabelan total sisi-ajaib, pelabelan total sisi-ajaib super, graf tidak terhubung, graf lintasan.

PENDAHULUAN

Pelabelan graf adalah suatu pemetaan satu-satu yang memetakan himpunan dari elemen-elemen graf kepada himpunan bilangan bulat positif yang disebut label. Domain dari pemetaan tersebut dapat berupa himpunan titik, atau himpunan sisi, atau gabungan himpunan titik dan sisi. Berdasarkan domainnya, pelabelan tersebut berturut-turut disebut pelabelan titik, pelabelan sisi, dan pelabelan total.

Salah satu macam pelabelan yang banyak mendapat perhatian adalah pelabelan ajaib. Pelabalen ajaib adalah perumuman ide bujur sangkar ajaib. Pelabelan ini pertama kali diperkenalkan oleh Sedlacek pada tahun 1963. Kemudian, Kotzig dan Rosa [1] memperkenalkan pelabelan total sisi-ajaib sebagai pelabelan total yang labelnya adalah integer dari 1 hingga $|V(G)| + |E(G)|$, sedemikian hingga bobot sisi adalah sama untuk setiap sisi di *G*. Mereka juga mengemukan konjektur bahwa pohon T_n adalah total sisi-ajaib. Dugaan ini diperkuat Enomoto yang telah menunjukkan bahwa pohon dengan titik kurang dari 16 adalah total sisi-ajaib. K. Wijaya dan E.T. Baskoro [4] telah mengkaji pelabelan total sisi-ajaib gabungan saling lepas *n* (*n* ganjil) buah graf, pada beberapa kelas graf. Pada tahun 1998, Enomoto dkk [3] memperkenalkan pelabelan total sisi-ajaib super. Mereka mendefinisikan p*elabelan total sisi-ajaib super* sebgai pelabelan total sisi-ajaib, dimana titiknya diberi label 1 hingga $|V(G)|$.

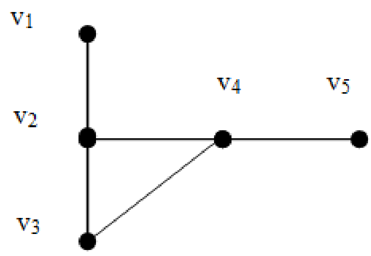
Beberapa paper yang mengkaji pelabelan total sisi-ajaib super pada beberapa graf telah dipublikasikan. Figueroa-Centeni dkk [5] mengkaji pelabelan total sisi-ajaib super pada graf-graf tidak terhubung. Kemudian E.T Baskoro dan A.A.G Ngurah [2] mengkaji pelabelan sisi-ajaib super untuk gabungan saling lepas n (n genap) buah kopi graf P_3.

LANDASAN TEORI

Notasi dan Definisi

Graf G adalah pasangan himpunan (V,E) dimana V adalah himpunan tak kosong dan E (mungkin kosong) adalah himpunan pasangan tak terurutdari eleman-elemen di V. Elemen-elemen dari V disebut titik dari G. Sedangkan elemen-elemen dari E disebut sisi dari G. Himpunan titik dari G dinotasikan $V(G)$, dan himpunan sisi dari G dinotasikan dengan $E(G)$. Order dari suatu graf G menyatakan banyaknya *titik di graf G*.

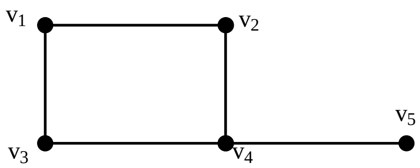
Misalkan u dan v dua titik di graf G. Titik u dikatak tetangga dari titik v jika ada sisi yang menghubungkan u dan v. Sisi seperti itu dinotasikan dengan uv. Titik u dan v dikatakan menempel pada sisi uv, dan sebaliknya sisi uv menempel pada titik u dan titik v. Sebagai contoh, dalam Gambar 1., titik v_2 adalah tetangga titik v_3; dan titik v_2 menempel pada sisi v_1v_2, v_2v_4, dan v_2v_3.



Gambar 1. Graf G

Derajat dari titik v, dinotasikan $d(v)$, pada graf G adalah banyaknya titik yang bertetangga dengan titik v. Dalam gambar 1, $d(v_2)=3$ dan $d(v_5)=1$.

Jalan dari titik u ke v dengan panjang n pada graf G adalah suatu barisan $u=v_0,v_1,v_2,\dots,v_n$ sedemikian hingga $v_{i-1}v_i$ adalah sisi di G untuk setiap $i=1,2,\dots,n$. Jalan dikatakan tertutup jika $v_0=v_n$, dan dikatakan terbuka jika $v_0 \neq v_n$. Lintasan adalah suatu jalan yang semua titiknya berbeda. Dalam Gambar 2, $v_1v_3v_4v_5v_4v_2$ adalah jalan dengan panjang 5, tetapi bukan lintasan; $v_1v_3v_4v_5$ adalah lintasan dengan panjang 3.



Gambar 2. Graf H

Gabungan dua graf G_1 dan G_2 dinotasikan dengan $G_1 \cup G_2$ adalah graf dengan himpunan titik $V_1 \cup V_2$ dan himpunan sisi $E_1 \cup E_2$.

Graf G dikatakan terhubung jika untuk setiap dua titik di G ada lintasan yang menghubungkan kedua titik tersebut. Jika tidak demikian, maka graf tersebut dikatakan graf tidak terhubung. Sebagai contoh, graf dalam gambar 1 dan gambar 2 merupakan graf terhubung.

Kelas-kelas Graf

Graf lintasan P_n adalah graf terhubung n titik yang terdiri dari tepat 2 titik berderajat 1 dan $n-1$ titik berderajat 2.
Graf lingkaran C_n adalah graf terhubung n titik dengan derajat semua titiknya adalah 2.
Graf roda W_n garf yang diperoleh dari C_n dengan menambahkan satu titik baru x dan menghubungkan titik x dengan semua titik di C_n . Titik x disebut pusat dari graf roda tersebut.
Graf lengkap K_n , $n > 1$ adalah graf dengan n titik yang setiap dua titiknya saling bertetangga.
Graf bintang S_n adalah graf terhubung yang terdiri dari 1 titik berderajat $n-1$ dan $n-1$ titik yang berderajat 1.
Graf pohon T_n adalah graf terhubung dengan n titik yang tidak memuat lingkaran
Graf kipas F_n , $n \geq 2$ adalah graf yang didapatkan dengan menghubungkan semua titik dari graf lintasan P_n dengan suatu titik yang disebut pudat. Jadi f_n terdiri dari $n+1$ titik dan $2n-1$ sisi.

Pelabelan Total Sisi-Ajaib

Pelabelan total sisi-ajaib pada graf $G=G(V,E)$ dengan angka ajaib k adalah pemetaan satu-satu dan pada $\lambda : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1,2,3,\dots,p+q\}$ dimana $p = |V(G)|$ dan $q = |E(G)|$ sedemikian hingga berlaku:

$$\lambda(x) + \lambda(xy) + \lambda(y) = k$$

untuk setiap $xy \in (G)$.

Selanjutnya, pelabelan total sisi-ajaib super adalah pelabelan total sisi ajaib yang pelabelan tititknya $\lambda(V(G)) = \{1,2,\dots,v\}$. Suatu graf dikatakan total sisi-ajaib (TSA) jika pelabelan total sisi-ajaib dapat dikenakan padanya, dan disebut pelabelan total sisi-ajaib super (TSAS) jika pelabelan total sisi-ajaib super dapat dikenakan padanya.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Kotzig [1] menunjukkan bahwa bila G suatu graf trikomatrik, terhubung dan total sisi-ajaib maka graf $H=mG$, yakni gabungan lepas dari m buah graf G adalah total sisi ajaib jika m ganjil. Namun hasil ini tidak terpublikasikan dengan baik, maka beberapa paper mengkaji ulang ketotal sisi ajaib-an dari gabungan yang saling lepas m buah yang identikal, dengan m ganjil,lihat diantaranya [4]

Namun ke-total sisi-ajaib-an dari graf mG, untuk suatu graf G sebarang dan m genap masih open problem. Karena alas an paritas maka graf mP_2 (m genap) adalah bukan TSA. Sedangkan E.T Baskoro dan A.A.G Ngurah [2] menunjukkan bahwa graf nP_3 adalah TSAS, untuk n genap.

Teorema berikut menunjukkan gabungan graf lintasan P_3 dan P_n mempunyai pelabelan total sisi-ajaib super.

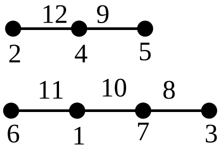
Misalkan himpunan titik dan himpunan sisi dari $P_3 \cup P_n$ adalah

$V(P_3 \cup P_n) = \{u_1, u_2, u_3\} \cup \{v_i : 1 \leq i \leq n\}$.
$E(P_3 \cup P_n) = \{u_1u_2, u_2u_3\} \cup \{v_iv_{i+1} : 1 \leq i \leq n-1\}$.

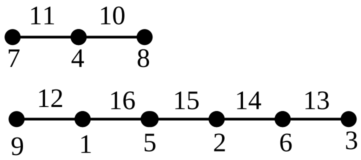
Teorema 1: Graf $P_3 \cup P_n$ adalah total sisi-ajaib super untuk setiap $4 \leq n \leq 15$.

Bukti:
Untuk n genap dan $4 \leq n \leq 15$, definisikan pelabelan total (a,2) total sisi antiajaib super pada $P_3 \cup P_n$ seperti berikut:

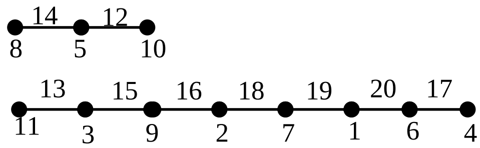
$P_3 \cup P_4$, $k = 18$



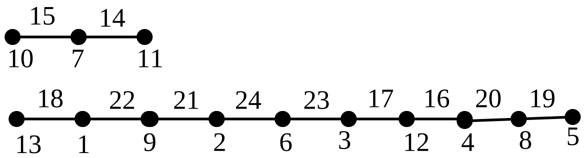
$P_3 \cup P_6$, $k = 22$



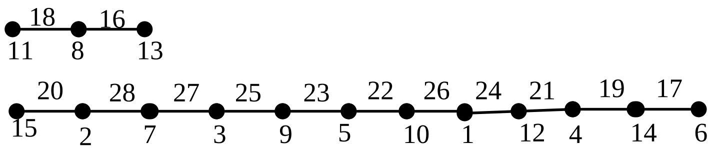
$P_3 \cup P_8$, $k = 27$



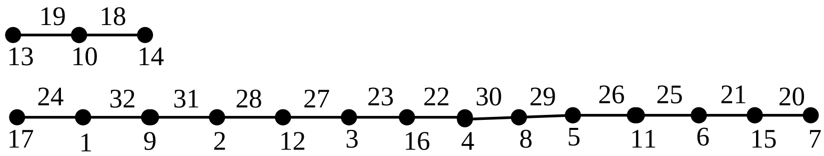
$P_3 \cup P_{10}$, $k = 32$



$P_3 \cup P_{12}$, $k = 37$



$P_3 \cup P_{14}$, $k = 42$



Untuk *n* ganjil ($n = 2k + 1$) dan $4 \leq n \leq 15$, didefinisikan pemetaan λ_2 dimana:
$\lambda_2\,(u_i) = \lambda_1(u_i)$, $1 \leq i \leq 3$

$\lambda_2\ (v_i) = \lambda_1(v_i),\ 1 \le i \le n-1$
$\lambda_2\ (v_n) = n+4$
$\lambda_2\ (v_{n-1}v_n) = n+4$
$\lambda_2\ (e) = \lambda_1(e) + 2,\ e \ne v_{n-1}v_n$
λ_1 : pelabelan total sisi-ajaib super untuk $P_3 \cup P_{2k}$ seperti pada Gambar 3.
Maka λ_2 adalah pelabelan total sisi-ajaib super.

Teorema 2 Untuk $n \equiv 0\ (mod\ 4), n \ge 16,$ graf $P_3 \cup P_n$ adalah total sisi-ajaib super dengan angka ajaib $k = \frac{5n+14}{2}$.

Bukti:
Tulis $n = 4r$ dan beri label titik-titk dan sisi-sisi $P_3 \cup P_n$ dengan cara sebagai berikut:

$$\lambda_1\ (u_1) = \frac{1}{4}(3n+16)$$
$$\lambda_1\ (u_2) = \frac{1}{4}(3n-4)$$
$$\lambda_1\ (u_3) = \frac{1}{4}(3n+8)$$

Untuk titik-titik dengan indeks gannjil, definisikan:

$$\lambda_1\ (v_j) = \begin{cases} n+3, & j = 1 \\ \frac{1}{2}(n+j-1), & j = 3,5,\dots,2r-3 \\ \frac{1}{2}(n+j+1), & j = 2r-1, 2r+1 \\ \frac{1}{4}(3n+12), & j = 2r+3 \\ \frac{1}{2}(n+j+5), & j = 2r+5, 2r+7, \dots, 4r-1 \end{cases}$$

Sedangkan untuk titik-titik dengan indeks genap, definisikan:

$$\lambda_1\ (v_j) = \begin{cases} \frac{1}{2}n-3, & j = 2 \\ \frac{1}{2}j, & j = 4,6,\dots,2r \\ 1, & j = 4r-2 \\ \frac{1}{2}n & j = 4r \end{cases}$$

$$\lambda_1\ (v_j) = \begin{cases} \frac{1}{4}\left(\frac{n}{2}+j+14\right), & j = 2r+2, 2r+6,\ \ r \equiv 0 \\ \frac{1}{4}\left(\frac{n}{2}+j\right), & j = 2r+4, 2r+8, \quad r \equiv 0 \\ \frac{1}{2}j+2, & j = 2r+10, 2r+16, \dots, 4r-8, \quad r \equiv 0, r > 6 \\ \frac{1}{2}j+2, & j = 2r+12, 2r+18, \dots, 4r-6, \quad r \equiv 0, r > 6 \\ \frac{1}{2}j-4, & j = 2r+14, 2r+20, \dots, 4r-4, \quad r \equiv 0, r > 6 \end{cases}$$

$$\lambda_1\left(v_j\right)=\begin{cases}\frac{1}{2}(n-j+8), & j=2r+2,2r+4,\ \ r\equiv 1\\ \frac{1}{2}j+2, & j=2r+6,2r+12\ldots 4r-8, \quad r\equiv 1, r>4\\ \frac{1}{2}j+2, & j=2r+8,2r+14,\ldots,4r-6, \quad r\equiv 1, r>4\\ \frac{1}{2}j-4, & j=2r+10,2r+16,\ldots,4r-4, \quad r\equiv 1, r>4\end{cases}$$

$$\lambda_1\left(v_j\right)=\begin{cases}\frac{1}{2}(2n-3j+14), & j=2r+2,2r+4,\ \ r\equiv 2\\ \frac{1}{4}(n+12), & j=2r+6, \quad r\equiv 2\\ \frac{1}{2}j+2, & j=2r+8,2r+14,\ldots,4r-8, \quad r\equiv 2, r>5\\ \frac{1}{2}j+2, & j=2r+10,2r+16,\ldots,4r-6, \quad r\equiv 2, r>5\\ \frac{1}{2}j-4, & j=2r+12,2r+18,\ldots,4r-4, \quad r\equiv 0, r>5\end{cases}$$

Untuk sisi-sisi didefinisikan:

$\lambda_1\ (u_1u_2)=n+4$

$\lambda_1\ (u_2u_3)=n+6$

$$\lambda_1\left(v_jv_{j+1}\right)=\begin{cases}n+7, & j=1\\ 3\frac{n}{2}+9, & j=2\\ 2n-j+7, & j=3,4,\ldots,2r-3\\ 2n-j+6, & j=2r-2,2r-1,2r\\ 5\frac{n}{2}-j+2, & j=4r-3,4r-2\\ n+5, & j=n-1\end{cases}$$

$$\lambda_1\left(v_jv_{j+1}\right)=\begin{cases}\frac{1}{4}(5n+2j+6) & j=2r+1,2r+3, r\equiv 0,2\\ \frac{1}{4}(5n+2j+6), & j=2r+2,2r+4, r\equiv 0,2\\ n+j-8, & j=2r+5,2r+7, r\equiv 0\\ n+j-10, & j=2+6,2r+8, r\equiv 0\end{cases}$$

$$\lambda_1\left(v_jv_{j+1}\right)=\begin{cases}2n-j+2 & j=2r+9,2r+15,\ldots,4r-9, \quad r\equiv 0, r>6\\ 2n-j+2 & j=2r+10,2r+16,\ldots,4r-8, \quad r\equiv 0, r>6\\ 2n-j+2 & j=2r+11,2r+17,\ldots,4r-7, \quad r\equiv 0, r>6\\ 2n-j+2 & j=2r+12,2r+18,\ldots,4r-6, \quad r\equiv 0, r>6\\ 2n-j+8 & j=2r+13,2r+19,\ldots,4r-5, \quad r\equiv 0, r>6\\ 2n-j+8 & j=2r+14,2r+20,\ldots,4r-4, \quad r\equiv 0, r>6\end{cases}$$

$$\lambda_1\left(v_jv_{j+1}\right)=\begin{cases}\frac{1}{4}(7n-2j+14), & j=2r+1,2r+3, \quad r\equiv 1\\ \frac{1}{4}(7n-2j+8), & j=2r+2,2r+4, \quad r\equiv 1\\ 2n-j+2 & j=2r+5,2r+11,\ldots,4r-9, \quad r\equiv 1, r>4\\ 2n-j+2 & j=2r+6,2r+12,\ldots,4r-8, \quad r\equiv 1, r>4\\ 2n-j+2 & j=2r+7,2r+13,\ldots,4r-7, \quad r\equiv 1, r>4\\ 2n-j+2 & j=2r+8,2r+14,\ldots,4r-6, \quad r\equiv 1, r>4\\ 2n-j+8 & j=2r+9,2r+15,\ldots,4r-5, \quad r\equiv 1, r>4\\ 2n-j+8 & j=2r+10,2r+16,\ldots,4r-4, \quad r\equiv 1, r>4\end{cases}$$

$$\lambda_1\left(v_j v_{j+1}\right)=\begin{cases} 2n-j+4, & j=2r+5, 2r+6, \quad r\equiv 2 \\ 2n-j+2 & j=2r+7, 2r+13, \dots, 4r-9, \quad r\equiv 2, r>5 \\ 2n-j+2 & j=2r+8, 2r+14, \dots, 4r-8, \quad r\equiv 2, r>5 \\ 2n-j+2 & j=2r+9, 2r+15, \dots, 4r-7, \quad r\equiv 2, r>5 \\ 2n-j+2 & j=2r+10, 2r+16, \dots, 4r-6, \quad r\equiv 2, r>5 \\ 2n-j+8 & j=2r+11, 2r+17, \dots, 4r-5, \quad r\equiv 2, r>5 \\ 2n-j+8 & j=2r+12, 2r+18, \dots, 4r-4, \quad r\equiv 2, r>5 \end{cases}$$

Catatan: $r \equiv s$, dihitung dalam modulo 3.

Dari pelabelan titik-titik dan sisi-sisi di atas dapat diperiksa bahwa graf $P_3 \cup P_n$ total sisi-ajaib super dengan angka ajaib $k = \frac{5n+14}{2}$.

Teorema 3 Untuk $n \equiv 1 \ (mod\ 4), n \geq 17$, graf $P_3 \cup P_n$ adalah total sisi-ajaib super dengan angka ajaib $k = \frac{5n+13}{2}$.

Bukti:
Beri label titik-titk dan sisi-sisi $P_3 \cup P_n$ dengan cara sebagai berikut:

$\lambda_2\ (u_i) = \lambda_1(u_i)$, $i = 1,2,3$

$$\lambda_2\left(v_j\right)=\begin{cases} \lambda_1\left(v_j\right), & j=1,2,\dots,n-1 \\ n+3, & j=n \end{cases}$$

$\lambda_2\ (u_i u_{i+1}) = \lambda_1\ (u_i u_{i+1})$+2, $i = 1,2$

$$\lambda_2\left(v_j\right)=\begin{cases} \lambda_1\left(v_j v_{j+1}\right), & j=1,2,\dots,n-2 \\ n+4, & j=n-1 \end{cases}$$

Dari pelabelan titik-titik dan sisi-sisi di atas dapat diperiksa bahwa graf $P_3 \cup P_n$ adalah total sisi-ajaib super dengan angka ajaib $k = \frac{5n+13}{2}$.

Teorema 4 Untuk $n \equiv 2 \ (mod\ 4), n \geq 18$, graf $P_3 \cup P_n$ adalah total sisi-ajaib super dengan angka ajaib $k = \frac{5n+14}{2}$.

Bukti:
Tulis $n = 4r + 14$ dan beri label titik-titik dan sisi-sisi $P_3 \cup P_n$ dengan cara sebagai berikut:

$$\lambda_1\ (u_1) = \frac{1}{4}(3n+10)$$

$$\lambda_1\ (u_2) = \frac{1}{4}(3n-2)$$

$$\lambda_1\ (u_3) = \frac{1}{4}(3n+14)$$

$$\lambda_1\left(v_j\right)=\begin{cases} n+3, & j=1 \\ \frac{j}{2}. & j=2,4,,\dots,n \\ \frac{1}{2}(n+j+1), & j=\ \ 3,5,\dots,2r+3 \\ \frac{1}{4}(3n+2), & j=2r+7 \\ \frac{1}{4}(3n+6), & j=2r+9 \\ \frac{n}{2}+1, & j=n-5 \end{cases}$$

$$\lambda_1\left(v_j\right)=\begin{cases} \frac{1}{2}(3j-n+25), & j=n-9,n-7\ ,\ \ r\equiv 0 \\ \frac{1}{2}(n+j+15), & j=2r+5,2r+11,\dots,4r-1,r\equiv 0 \\ \frac{1}{2}(n+j+3), & j=2r+13,2r+19,\dots,4r+1,r\equiv 0,r>3 \\ \frac{1}{2}(n+j+3), & j=2r+15,2r+21,\dots,4r+3,r\equiv 0,r>3 \\ \frac{1}{2}(3j-n+5), & j=n-3,n-1,\ \ r\equiv 0, \end{cases}$$

$$\lambda_1\left(v_j\right)=\begin{cases} \frac{1}{2}(n+j+15), & j=2r+5,2r+11\dots4r+3, \quad r\equiv 1, \\ \frac{1}{2}(n+j+3), & j=2r+13,2r+19,\dots,4r+11, \quad r\equiv 1 \\ \frac{1}{2}(n+j+3), & j=2r+15,2r+21,\dots,4r+13, \quad r\equiv 1, \end{cases}$$

$$\lambda_1\left(v_j\right)=\begin{cases} \frac{1}{2}(n+j+15), & j=2r+5,2r+11,\dots,4r-1\ ,\ \ r\equiv 2 \\ \frac{1}{2}(n+j+3), & j=2r+13,2r+19,\dots,4r+3,r\equiv 2,r>2 \\ \frac{1}{2}(n+j+3), & j=2r+15,2r+21,\dots,4r+5,r\equiv 2,r>2 \\ \frac{1}{2}(n+j+7), & j=n-7,n-3, \quad r\equiv 2, \\ n-1 & j=n-1,\ \ r\equiv 2, \end{cases}$$

Label sisi-sisi didefinisikan:

$\lambda_1\left(u_1u_2\right)=n+5$

$\lambda_1\left(u_2u_3\right)=n+4$

$$\lambda_1\left(v_jv_{j+1}\right)=\begin{cases} 3\frac{n}{2}+3, & j=1 \\ 2n-j+6, & j=2,3,\dots,2r+3 \\ 2n-j+6, & j=2r+6,2r+7,2r+8,2r+9 \\ 5\frac{n}{2}-j+3, & j=n-6,n-5 \\ 2n-j-1, & j=2r+4,2r+10,\dots,4r-2,r\equiv 0 \\ 2n-j-1 & j=2r+5,2r+11,\dots.,4r-1,r\equiv 0 \end{cases}$$

$$\lambda_1(v_jv_{j+1}) = \begin{cases} 2n-j+5 & j = 2r+12, 2r+18, \dots, 4r, r \equiv 0, r > 3 \\ 2n-j+5 & j = 2r+13, 2r+19, \dots, 4r+1, r \equiv 0, r > 3 \\ 2n-j+5 & j = 2r+14, 2r+20, \dots, 4r+2, r \equiv 0, r > 3 \\ 2n-j+5 & j = 2r+15, 2r+21, \dots, 4r+3, r \equiv 0, r > 3 \\ 3n-2j-7, & j = n-10, n-8, \quad r \equiv 0 \\ 3n-2j-6, & j = n-9, n-7, r \equiv 0 \\ 3n-2j+3, & j = n-4, n-2, r \equiv 0 \\ 3n-2j+4, & j = n-3, n-1, r \equiv 0 \end{cases}$$

$$\lambda_1(v_jv_{j+1}) = \begin{cases} 2n-j+1 & j = 2r+4, 2r+10, \dots, 4r+2, \quad r \equiv 1 \\ 2n-j+1 & j = 2r+5, 2r+11, \dots, 4r+3, \quad r \equiv 1 \\ 2n-j+5 & j = 2r+12, 2r+18, \dots, 4r+10, \quad r \equiv 1 \\ 2n-j+5 & j = 2r+13, 2r+19, \dots, 4r+11, \quad r \equiv 1 \\ 2n-j+5 & j = 2r+14, 2r+20, \dots, 4r+12, \quad r \equiv 1 \\ 2n-j+5 & j = 2r+15, 2r+21, \dots, 4r+13, \quad r \equiv 1 \end{cases}$$

$$\lambda_1(v_jv_{j+1}) = \begin{cases} 2n-j-1 & j = 2r+4, 2r+10, \dots, 4r, \quad r \equiv 2 \\ 2n-j-1 & j = 2r+5, 2r+11, \dots, 4r+1, \quad r \equiv 2 \\ 2n-j+3 & j = n-8, n-7, \quad r \equiv 2 \\ j+11 & j = n-4, n-2, \quad r \equiv 2 \\ j+9 & j = n-3, n-1, \quad r \equiv 2 \end{cases}$$

$$\lambda_1(v_jv_{j+1}) = \begin{cases} 2n-j+5 & j = 2r+12, 2r+18, \dots, 4r+2, r \equiv 2, r > 2 \\ 2n-j+5 & j = 2r+13, 2r+19, \dots, 4r+3, r \equiv 2, r > 2 \\ 2n-j+5 & j = 2r+14, 2r+20, \dots, 4r+4, r \equiv 2, r > 2 \\ 2n-j+5 & j = 2r+15, 2r+21, \dots, 4r+5, r \equiv 2, r > 2 \end{cases}$$

Catatan: $r \equiv s$, dihitung dalam modulo 3.
Dari pelabelan titik-titik dan sisi-sisi di atas dapat diperiksa bahwa graf $P_3 \cup P_n$ adalah total sisi-ajaib super dengan angka ajaib $k = \frac{5n+14}{2}$.

Teorema 5 Untuk $n \equiv 3 \ (mod\ 4), n \geq 19$, graf $P_3 \cup P_n$ adalah total sisi-ajaib super dengan angka ajaib $k = \frac{5n+13}{2}$.

Bukti:
Serupa dengan bukti teorema 3 dengan mengambil λ_1 sebagai pelabelan pada teorema 4.
Dari pelabelan titik-titik dan sisi-sisi di atas dapat diperiksa bahwa graf $P_3 \cup P_n$ adalah total sisi-ajaib super dengan angka ajaib $k = \frac{5n+13}{2}$.

REFERENSI

[1] A. Kotzig dan A. Rosa, *Magic Valuations of Finite Graph*s, 1970, Canad. Math. Bull. 13, 451-461.

[2] E.T Baskoro dan A.A.G Ngurah, 2003, *On Super Edge Magic Total Labelling on nP$_3$, Bull Inst. Combin, Appl.* **37**, 82-87.

[3] H. Enomoto, A.S Llado, T. Nakagimawa and G. Ringel, 1998, *Super Edge Magic Graphs, SUT Journal of Mathematics*, **34**, 105-109.

[4] K. Wijaya, E.T Baskoro, 2000, *Pelabelan Total Sisi-Ajaib , Tesis S2, Departemen Matematika ITB.*

[5] R. M Figueroa-Centeno, R. Ichisima, F.A. Muntaner-Batle, 2002, *On Super-Edge Magic Graph*, Ars Combin. **64**, 81-96.