Jurnal "LOG!K@" , Jilid 6, No. 1, 2016, Hal. 62 - 70
ISSN 1978 – 8568

SIFAT ADITIF KATEGORI HOMOTOPI KOMPLEKS-*U*

Gustina Elfiyanti
Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi,
Universitas Islam Negeri Syarif Hidayatullah Jakarta
Email: gustina.elfiyanti@uinjkt.ac.id

Abstract: Davvaz and Shabbani-Solt introduced a notion of chain *U*-complex as a generalization of chain complex by replacing kernels with submodules *U* . They used the definitions to generalize some results in homological algebra. In this paper we propose a generalization of homotopy category of complexes called homotopy category of *U*-complexes by replacing the objects with chain *U*-complexes, morphisms with *U*-homotopy equivalent classes of morphisms of *U*-complexes. We prove that this category is an additive category.
Keywords: chain *U*-complex, morphisms of *U*-complexes, *U*-homotopy homotopy category of *U*-complexes, additive category.

Abstrak: Davvaz dan Shabbani-Solt mengenalkan rantai rantai kompleks-*U* sebagai perumuman rantai kompleks dengan mengganti kernel dengan submodul *U*. Mereka menggunakan definisi tersebut untuk memperumum beberapa hasil dalam aljabar homologi. Tulisan ini bertujuan untuk membuat perumuman kategori homotopi kompleks yang disebut kategori homotopi kompleks-*U* dengan mengganti objek dengan rantai kompleks-*U* dan morfisma dengan kelas ekivalen homotopi-*U* dari morfisma kompleks-*U*. Diperoleh bahwa kategori ini merupakan kategori aditif.
Kata kunci: rantai kompleks-*U*, morfisma kompleks-*U*, homotopi-*U*, kategori homotopi kompleks-*U*, kategori aditif.

PENDAHULUAN

Dalam kehidupan manusia biasanya mengklasifikasikan objek-objek berdasarkan kemiripan sifat yang dimiliki. Pengklasifikasian tersebut bertujuan untuk mempermudah mempelajari/mengkaji objek yang diminati. Karena objek-objek yang berada dalam kelompok yang sama memiliki sifat yang sama maka untuk mengkaji kelompok tersebut kita tidak perlu mempelajari semua anggotanya tapi cukup perwakilannya saja.

Hal yang sama juga berlaku dalam aljabar, objek yang dibahas adalah himpunan atau koleksi himpunan yang dilengkapi dengan suatu struktur. Metode pengklasifikasian dilakukan dengan pemetaan, khususnya isomorfisma. Jika terdapat suatu isomorfisma antara dua objek maka kedua objek tersebut memiliki sifat yang sama. Sehingga kajian mengenai suatu struktur aljabar dapat dilakukan melalui kelas-kelas isomorfisma dari objeknya. Pendekatan yang mengoptimalkan kajian sifat-sifat pemetaan ini adalah pendekatan kategori.

Kategori adalah suatu struktur aljabar yang terdiri dari koleksi objek, koleksi homomorfisma antar objek dan sebuah operasi komposisi. Jika objek dari kategori berupa rantai kompleks, yaitu rantai modul-*R* dan homomorfisma modul-*R* dengan sifat komposisi setiap homomorfisma yang bertetanggaan adalah nol, maka kategori tersebut kategori kompleks.

Suatu rantai kompleks $\cdots \to X_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} X_n \xrightarrow{d_n} X_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} X_{n-2}$™ $\cdots$ dikatakan barisan eksak jika $\mathrm{Im}(d_{n+1}) = d_n^{-1}(\{0\})$. Suatu pertanyaan natural adalah bagaimana jika $\{0\}$ diganti dengan U_{n-1} sebuah submodul dari X_{n-1}. Dalam [1], Davvaz dan Parnian-Garmaleky mengenalkan perumuman dari konsep ini yang disebut barisan eksak-U, yang merupakan modifikasi dari notasi barisan eksak biasa dan menjawab permasalahan di atas. Mereka kemudian memperumuman beberapa hasil untuk barisan eksak biasa pada barisan eksak-U. Dalam [2], Anvariyeh dan Davvaz melanjutkan penelitian dalam topik ini dan fokus dalam aplikasi barisan eksak-U dan mempelajari barisan terpisah-U. Kemudian dalam [3] Davvaz dan Shabani-Solt membuat perumuman beberapa topik dalam aljabar homologi. Mereka mengenalkan konsep rantai kompleks-U, morfisma kompleks-*U*, homologi-*U* dan fungtor-$\mathcal{U}$. Mereka menggunakan konsep tersebut untuk mencari perumuman dari Lema Lambek, Lema Ular, Homomorfisma Penghubung dan Segitiga Eksak.

Elfiyanti dkk. [4] menggunakan penelitian Davvaz dan Shabani-Solt untuk membuat perumuman kategori kompleks yang disebut kategori kompleks-*U*. Tulisan ini bertujuan untuk melanjutkan penelitian [3] dan [4] dengan membuat perumuman kategori homotopi kompleks, yang disebut kategori homotopi kompleks-U, diperoleh bahwa kategori ini adalah kategori aditif.

KATEGORI KOMPLEKS

Pada bagian ini dipaparkan beberapa teori dasar yang bersumber dari [5], [6] , [7], [8] dan [9] dengan notasi penulisan disesuaikan dengan [6].

Suatu kategori $\mathcal{C}$ terdiri dari: kelas objek $Ob\mathcal{C}$ yang elemennya disebut objek dari $\mathcal{C}$, koleksi himpunan $\mathrm{Hom}(X,Y)$ satu untuk setiap pasangan terurut objek-objek dari $X,Y \in \mathcal{C}$ dan koleksi pemetaan

$$\begin{array}{llll} \circ: & \mathrm{Hom}(X,Y)\times\mathrm{Hom}(Y,Z) & \to & \mathrm{Hom}(X,Z) \\ & (f,g) & \mapsto & gf \end{array}$$

untuk setiap triple terurut $X,Y,Z \in \mathcal{C}$. Ketiga data ini harus memenuhi:

1. Setiap morfisma *f* secara tunggal menentukan $X,Y \in \mathcal{C}$ sehingga $f \in Hom(X,Y)$. Dengan kata lain jika $(X,Y) \neq (X',Y')$ maka $\mathrm{Hom}(X,Y) \cap \mathrm{Hom}(X',Y') = \varnothing$.
2. Untuk setiap $X \in \mathcal{C}$ terdapat morfisma $1_X \in \mathrm{Hom}(X,X)$ dinamakan identitas pada X sehingga jika $f \in \mathrm{Hom}(X,Y)$ dan $g \in \mathrm{Hom}(W,X)$ maka $f1_X = f$ dan $1_X g = g$.
3. Komposisi morfisma bersifat asosiatif, yaitu jika $f \in \mathrm{Hom}(X,Y), g \in \mathrm{Hom}(Y,Z)$ dan $h \in \mathrm{Hom}(Z,W)$ maka $h(gf) = (hg)f$.

Jika X objek di $\mathcal{C}$ maka 1_X tunggal. Dengan demikian terdapat korespondensi satu-satu antara kelas objek di $\mathcal{C}$ dan kelas morfisma identitas, oleh karena itu dalam mendefinisikan sifat-sifat pada kategori cukup melihat morfisma dan komposisi (bukan objek). Pernyataan yang sederhana dalam kategori adalah suatu komposisi morfisma sama dengan suatu komposisi lainnya, misalkan $gf = g' f'$. Dalam hal ini kita katakan diagram berikut komutatif jika $gf = g'f'$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f'"] & Y \arrow[d, "g"] \\ X' \arrow[r, "g'"] & Y' \end{tikzcd}$$

Suatu kategori $\mathcal{A}$ dikatakan kategori aditif jika berlaku:

A1 Untuk setiap pasang objek X, Y di $\mathcal{C}$ maka himpunan $\operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(X,0)$ merupakan grup abel dan komposisi $\operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(X,Y) \times \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(Y,Z) \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(X,Z)$ bilinier atas $\mathbb{Z}$.

A2 Kategori $\mathcal{A}$ memuat objek 0 (yaitu untuk setiap objek di $\mathcal{A}$ maka himpunan $\operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(X,0)$ dan $\operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(0,X)$ memuat tepat satu unsur.

A3 Untuk setiap pasang objek X, Y di $\mathcal{A}$ terdapat koproduk $X \oplus Y$.

Kategori aditif $\mathcal{A}$ dikatakan kategori abel jika setiap morfismanya punya kernel dan kokernel serta untuk setiap morfisma $f : X \to Y$ di $\mathcal{A}$ maka morfisma natural $\operatorname{ko}\operatorname{Im}(f) \to \operatorname{Im}(f)$.

Rantai kompleks atas kategori aditif $\mathcal{A}$ adalah barisan tak hingga $X = (X_n, d_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, dengan $X \in Ob\mathcal{A}$ dan d_n (disebut differensial) adalah morfisma di $\operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(X_n, X_{n+1})$ yang memenuhi $d_n^X d_{n+1}^X = 0$ untuk setiap $n \in \mathbb{Z}$. Rantai kompleks dapat ditulis sebagai barisan objek dan morfisma berikut.

$$X = (X_n, d_n^X) : \cdots \to X_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}^X} X_n \xrightarrow{d_{n+1}^X} X_{n-1} \xrightarrow{d_{n+1}^X} X_{n-2} \to \cdots$$

Morfisma antara rantai kompleks $X = (X_n, d_n^X)_{n\in\mathbb{Z}}$ dan $Y = (Y_n, d_n^Y)_{n\in\mathbb{Z}}$ adalah barisan morfisma $f = (f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ sehingga diagram di bawah komutatif, yaitu $f_{n-1} d_n^X = d_n^Y f_n$ untuk setiap $n \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & X_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}^X"] \arrow[d, "f_{n+1}"] & X_n \arrow[r, "d_n^X"] \arrow[d, "f_n"] & X_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{n-1}"] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & Y_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}^Y"] & Y_n \arrow[r, "d_n^Y"] & Y_{n-1} \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

Koleksi semua rantai kompleks atas $\mathcal{A}$ bersama morfisma kompleks dan operasi komposisi membentuk kategori kompleks, dinotasikan dengan $\mathbf{C}(\mathcal{A})$. *Jika $\mathcal{A}$ kategori abel, yaitu kategori aditif yang setiap morfismanya punya kernel dan kokernel serta untuk setiap* *morfisma kompleks* $f : X \to Y$ *maka morfisma natural* $\operatorname{koIm}(f) \to \operatorname{Im}(f)$ *merupakan isomorfisma, maka* $\mathbf{C}(\mathcal{A})$ *juga kategori abel.*

PERUMUMAN RANTAI KOMPLEKS

Pada bagian ini dipaparkan hasil penelitian Davvaz dan Shabani-Solt. Untuk selanjutnya $\mathcal{A}$ menyatakan kategori abel $R-\mathbf{Mod}$, yaitu kategori modul atas gelanggang komutatif dengan kesatuan R.

***Definisi 1**.*

Rantai kompleks-U^X atas kategori $\mathcal{A}$ adalah keluarga $X = \left(X, U^X, d^X\right) = \left(X_n, U_n^X, d_n^X\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ dengan $U_n^X \subseteq X_n$ objek di $\mathcal{A}$ dan setiap X_n dan $d_n^X : X_n \to X_{n-1}$ adalah homomorfisma modul-*R*, sehingga untuk setiap $n \in \mathbb{Z}$ berlaku:

1. $d_n^X d_{n+1}^X \left(X_{n+1}\right) \subseteq U_{n-1}^X$
2. $\operatorname{Im}\left(d_n^X\right) \supseteq U_{n-1}^X$

Rantai kompleks-U^X dapat ditulis sebagai barisan objek dan morfisma berikut.

$$\left(X, U^X, d^X\right) : \cdots \to X_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}^X} X_n \xrightarrow{d_n^X} X_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}^X} X_{n-2} \to \cdots$$

Dari definisi di atas maka jelas bahwa rantai kompleks adalah rantai kompleks-**0**, dengan **0** barisan submodul **0**. Begitu juga dengan rantai $\left(X, U^X, d^X\right)$ dengan sifat $d_n^X d_{n+1}^X\left(X_{n+1}\right) = U_{n+1}^X$ juga rantai kompleks-U^X. Jika $\left(X, U^X, d^X\right)$ rantai kompleks-U^X maka $\operatorname{Im}\left(d_{n+1}^X\right) \subseteq \left(d_n^X\right)^{-1}\left(U_{n-1}^X\right)$.

Contoh 2

1. Pandang rantai modul-*R* dan rantai homomorfisma berikut

   $$\cdots \to \mathbb{Z}_{32} \xrightarrow{2x} \mathbb{Z}_{32} \xrightarrow{2x} \mathbb{Z}_{32} \to \cdots$$

   Maka $X = \left(\mathbb{Z}_{32}, \left\langle \overline{4} \right\rangle, 2x\right)$ adalah rantai kompleks-$\left\langle \overline{4} \right\rangle$ dan $Y = \left(\mathbb{Z}_{32}, \left\langle \overline{2} \right\rangle, 2y\right)$ adalah rantai kompleks-$\left\langle \overline{2} \right\rangle$.
2. Untuk rantai modul-*R* dan rantai homomorfisma berikut

   $$\cdots \to \mathbb{Z}_{32} \xrightarrow{4x} \mathbb{Z}_{32} \xrightarrow{4x} \mathbb{Z}_{32} \to \cdots$$

   maka $Z = \left(\mathbb{Z}_{32}, \left\langle \overline{8} \right\rangle, 4x\right)$ adalah rantai kompleks$-\left\langle \overline{8} \right\rangle$.

Definisi 3 (Morfisma kompleks-U)

Misalkan $\left(X, U^X, d^X\right)$ dan $\left(Y, U^Y, d^Y\right)$ masing-masing adalah rantai kompleks-U^X dan kompleks-U^Y. Morfisma kompleks-*U* atas $\mathcal{A}$ adalah morfisma rantai kompleks

$f=\left(f_n : X_n \to Y_n\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ dengan $f_n\left(U_n^X\right)\subseteq U_n^Y$. Morfisma ini disebut juga rantai pemetaan-$\left(U^X,U^Y\right)$.

Contoh 4

Misalkan $X=\left(\mathbb{Z}_{32},\langle\overline{4}\rangle,2x\right)$ dan $Y=\left(\mathbb{Z}_{32},\langle\overline{2}\rangle,2y\right)$. Definisikan $f_n:\mathbb{Z}_{32}\to\mathbb{Z}_{32}$ sebagai $f_n : x\mapsto 4x$ maka diagram berikut komutatif

$$\begin{tikzcd}
X: \arrow[d, "f"] & \cdots \arrow[r] & \mathbb{Z}_{32} \arrow[r, "2x"] \arrow[d, "4x"] & \mathbb{Z}_{32} \arrow[r, "2x"] \arrow[d, "4x"] & \mathbb{Z}_{32} \arrow[r] \arrow[d, "4x"] & \cdots \\
Y: & \cdots \arrow[r] & \mathbb{Z}_{32} \arrow[r, "2y"] & \mathbb{Z}_{32} \arrow[r, "2y"] & \mathbb{Z}_{32} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

karena $4\langle\overline{4}\rangle=\langle\overline{16}\rangle\subseteq\langle\overline{2}\rangle$ maka f adalah rantai pemetaan$-\left(\langle\overline{4}\rangle,\langle\overline{2}\rangle\right)$

Proposisi 5

Misalkan $\left(X,U^X,d^X\right)$ adalah rantai kompleks-U^X sehingga $d_n^X d_{n+1}^X\left(X_{n+1}\right)=U_{n-1}^X$ dan $\left(Y,U^X,d^Y\right)$rantai kompleks-U^Y. Jika $f=\left(f_n : X_n\to Y_n\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ pemetaan rantai kompleks, maka f juga rantai pemetaan-$\left(U^X,U^Y\right)$

Definisi 6 (Homotopi−U)

Misalkan $\left(X,U^X,d^X\right)$ dan $\left(Y,U^X,d^Y\right)$ masing-masing adalah rantai kompleks-U^X dan rantai kompleks-U^Y. Misalkan pula f,g adalah dua rantai pemetaan-$\left(U^X,U^Y\right)$. Pemetaan f dan g dikatakan homotop-$\left(U^X,U^Y\right)$, dinotasikan dengan $f\simeq g$ jika terdapat barisan morfisma $h=\left(h_n : X_n\to Y_{n+1}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$

$$\begin{tikzcd}
X: \arrow[d, "f"] & \cdots \arrow[r] & X_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}^X"] \arrow[d, "f_{n+1}"] & X_n \arrow[r, "d_n^X"] \arrow[d, "f_n"] \arrow[dl, "h_n"] & X_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{n-1}"] \arrow[dl, "h_{n-1}"] & \cdots \\
Y: & \cdots \arrow[r] & Y_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}^Y"] & Y_n \arrow[r, "d_n^Y"] & Y_{n-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

sehingga untuk setiap $n\in\mathbb{Z}$ berlaku:

1. $f_n-g_n=d_{n+1}^Y h_n+h_{n-1}d_n^X$
2. $h_n\left(U_n^X\right)\subseteq U_{n+1}^Y$

Barisan $h=\left(h_n\right)_{n\in\mathbb{Z}}$disebut rantai homotopi-$\left(U^X,U^Y\right)$. Jika $g=0$ maka f dikatakan homotop-$\left(U^X,U^Y\right)$ ke 0.

Lema 7

Relasi homotop-$\left(U^X,U^Y\right),\simeq,$ adalah relasi ekivalen.

Bukti:

1. Akan dibuktikan "$\simeq$" bersifat reflektif.
   Misalkan $r_n=0$ untuk setiap $n\in\mathbb{Z}$ maka $d_{n+1}^Y r_n+r_{n-1}d_n^X=f_n-f_n=0$
   dan jelas $r_n(U_n^X)=0_{C_{n-1}}\subseteq U_{n+1}^Y$ maka $f\simeq f$.

2. Akan dibuktikan "$\simeq$ "bersifat simetris. Misalkan $f\simeq g$ maka terdapat rantai homotopi-$\left(U^X,U^Y\right)$, $r=\left(r_n:X_n \text{™ } Y_{n+1}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$, sehingga $d_{n+1}^Y r_n+r_{n-1}d_n^X=f_n-g_n$ dan $r_n(U_n^X)\subseteq U_{n+1}^Y$.
   Misalkan $s=\left(s_n\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ adalah rantai homotopi$-\left(U^X,U^Y\right)$ dengan $s_n=-r_n$, sehingga
   $$\begin{aligned} d_{n+1}^Y r_n+r_{n-1}d_n^X &= f_n-g_n-(d_{n+1}^Y r_n+r_{n-1}d_n^X)=-(f_n-g_n)d_{n+1}^Y(-r_n)+(-r_{n-1})d_n^X \\ &= g_n-f_n d_{n+1}^Y s_n+s_{n-1}d_n^X=g_n-f_n \end{aligned}$$

   Karena $r_n(U_n^X)\subseteq U_{n+1}^Y$ tertutup maka $-r_n(U_n^X)=s_n(U_n^X)\subseteq U_{n+1}^Y$. Jadi $g\simeq f$, maka terbukti "$\simeq$" bersifat simetris.

3. Akan dibuktikan"$\simeq$" bersifat transitif. Misalkan $f\simeq g$ dan $g\simeq h$, maka terdapat rantai homotopi$-\left(U^X,U^Y\right)$, $r=\left(r_n:X_n \text{™ } Y_{n+1}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ dan $s=\left(s_n:X_n \text{™ } Y_{n+1}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ sehingga $d_{n+1}^Y r_n+r_{n-1}d_n^X=f_n-g_n$, $d_{n+1}^Y s_n+s_{n-1}d_n^X=g_n-h_n$ dan $r_n(U_n^X)\subseteq U_{n+1}^Y$, $s_n(U_n^X)\subseteq U_{n+1}^Y$.

   Perhatikan.
   $$f_n-g_n+g_n-h_n=d_{n+1}^Y r_n+r_{n-1}d_n^X+d_{n+1}^Y s_n+s_{n-1}d_n^X=d_{n+1}^Y(r_n+s_n)+(r_{n-1}+s_{n-1})d_n^X$$
   Definisikan $t=\left(t_n\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ dengan $t_n=r_n+s_n$ untuk setiap $n\in\mathbb{Z}$, maka $f_n-g_n+g_n-h_n=$ $d_{n+1}^Y(r_n+s_n)+(r_{n-1}+s_{n-1})d_n^X=d_{n+1}^Y t_n+t_{n-1}d_n^X=f_n-h_n$. Karena $r_n(U_n^X)\subseteq U_{n+1}^Y$ dan $s_n(U_n^X)\subseteq U_{n+1}^Y$ maka jelas $t_n(U_n^X)\subseteq U_{n+1}^Y$. Terbukti $f\simeq h$, dan "$\simeq$ " bersifat transitif.

Lema 8

Himpunan kelas ekivalen relasi homotopi membentuk grup abel.

Bukti:

Misalkan $f\in\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}(\mathcal{A},U)}\left(X,Y\right)$, karena $\overline{f}=\left\{g\in Hom_{\mathbf{C}(\mathcal{A},U)}\left(X,Y\right)\mid f\simeq g\right\}$ subhimpunan dari $Hom_{\mathbf{C}(\mathcal{A},U)}\left(X,Y\right)$ cukup dibuktikan $\overline{f}$ subgrup dari $Hom_{\mathbf{C}(\mathcal{A},U)}\left(X,Y\right)$. Misalkan $g,h\in\overline{f}$ maka terdapat $r=\left(r_n:X_n\to Y_{n+1}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ dan $s=\left(s_n:X_n\to Y_{n+1}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ sehingga $f_n-g_n=d_{n+1}^Y r_n+r_{n-1}d_n^X$ dan $f_n-h_n=d_{n+1}^Y s_n+s_{n-1}d_n^X$. Perhatikan

$$g_n - h_n = d^Y_{n+1} r_n + r_{n-1} d^X_n - d^Y_{n+1} s_n - s_{n-1} d^X_n = d^Y_{n+1}\left(r_n - s_n\right) + \left(r_{n-1} - s_{n-1}\right) d^X_n$$

Definisikan $t = \left(t_n = r_n - s_n : X_n \to Y_{n+1}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$, karena $r_n\left(U^X_n\right) \subseteq U^Y_{n+1}$ dan $s_n\left(U^X_n\right) \subseteq U^Y_{n+1}$ maka $t_n\left(U^X_n\right) \subseteq U^Y_{n+1}$. Dengan demikian t_n adalah rantai homotopi-$\left(U^X, U^Y\right)$, oleh karena itu $g - h \in \overline{f}$. Terbukti $\overline{f}$ subrup dari $Hom_{\mathbf{C}(\mathcal{A},U)}\left(X, Y\right)$. Karena operasi penjumlahan fungsi bersifat komutatif maka $\overline{f}$ grup abel.

Lema 9

Misalkan $\left(X, U^X, d^X\right)$, $\left(Y, U^X, d^Y\right)$dan $\left(Z, U^Z, d^Z\right)$ masing-masing adalah rantai kompleks-U^X, rantai kompleks-U^Y dan rantai kompleks-U^Z. Jika $f \simeq g : X \to Y$ dan $f' \simeq g' : Y \to Z$, maka $f' f \simeq g' g : X \to Z$.

Bukti:

Misalkan $f_n - g_n = d^Y_{n+1} h_n + h_{n-1} d^X_n$, $f'_n - g'_n = d^Z_{n+1} h'_n + h'_{n-1} d^Y_n$, $h_n\left(U^X_n\right) \subseteq U^Y_{n+1}$ dan $h'_n\left(U^Y_n\right) \subseteq U^Z_{n+1}$. Pandang diagram komutatif berikut:

$$\begin{tikzcd}
X: \arrow[d, "f-g"] & \cdots \arrow[r] & X_{n+1} \arrow[r, "d^X_{n+1}"] \arrow[d, "f_{n+1}-g_{n+1}"] & X_n \arrow[r, "d^X_n"] \arrow[d, "f_n-g_n"] \arrow[dl, "h_n"] & X_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{n-1}-g_{n-1}"] \arrow[dl, "h_{n-1}"] & \cdots \\
Y: \arrow[d, "f'-g'"] & \cdots \arrow[r] & Y_{n+1} \arrow[r, "d^Y_{n+1}"] \arrow[d, "f'_{n+1}-g'_{n+1}"] & Y_n \arrow[r, "d^Y_n"] \arrow[d, "f'_n-g'_n"] \arrow[dl, "h'_n"] & Y_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "f'_{n-1}-g'_{n-1}"] \arrow[dl, "h'_{n-1}"] & \cdots \\
Z: & \cdots \arrow[r] & Z_{n+1} \arrow[r, "d^Z_{n+1}"] & Z_n \arrow[r, "d^Z_n"] & Z_{n-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Akan dibuktikan terdapat $s_n : X_n \to Z_{n+1}$ sehingga $d^Z_{n+1} s_n + s_{n-1} d^X_n = f'_n f_n - g'_n g_n$

$$\begin{aligned}
f'_n f_n - g'_n g_n &= f'_n\left(f_n - g_n\right) + \left(f'_n - g'_n\right) g_n \\
&= f'_n\left(d^Y_{n+1} h_n + h_{n-1} d^X_n\right) + \left(d^Z_{n+1} h'_n + h'_{n-1} d^Y_n\right) g_n \\
&= f'_n d^Y_{n+1} h_n + f'_n h_{n-1} d^X_n + d^Z_{n+1} h'_n g_n + h'_{n-1} d^Y_n g_n \\
&= d^Z_{n+1} f'_{n+1} h_n + f'_n h_{n-1} d^X_n + d^Z_{n+1} h'_n g_n + h'_{n-1} g_{n-1} d^X_n \\
&= d^Z_{n+1}\left(f'_{n+1} h_n + h'_n g_n\right) + \left(f'_n h_{n-1} + h'_{n-1} g_{n-1}\right) d^X_n
\end{aligned}$$

pilih $s_n = f'_{n+1} h_n + h'_n g_n$ maka $s_n : X_n \to Z_{n+1}$ dan berlaku $f'_n f_n - g'_n g_n = d^Z_{n+1} s_n + s_{n-1} d^X_n$. Dengan demikian kondisi (1) pada Definisi homotopi-$\left(U^X, U^Z\right)$ dipenuhi. Selanjutnya akan dibuktikan $s_n\left(U^X_n\right) \subseteq U^Z_n$. Karena g adalah rantai pemetaan-$\left(U^X, U^Y\right)$ maka $g_n\left(U^X_n\right) \subseteq U^Y_n$, maka $h_n' g_n\left(U_n^X\right) \subseteq h_n'\left(U_n^Y\right) \subseteq U_{n+1}^Y$. Kemudian karena f' adalah rantai pemetaan-$\left(U^X, U^Y\right)$ maka $f_{n+1}' h_n\left(U_n^X\right) \subseteq f_{n+1}'\left(U_{n+1}^Y\right) \subseteq U_{n+1}^Z$. Jadi diperoleh $s_n\left(U_n^X\right) \subseteq U_n^Z$.

PERUMUMAN KATEGORI HOMOTOPI KOMPLEKS

Dalam (4) kategori kompleks-U atas $\mathcal{A}$ didefinisikan analog dengan kategori kompleks yaitu kategori yang objeknya berupa rantai kompleks-U atas $\mathcal{A}$, morfismanya adalah morfisma kompleks-U atas $\mathcal{A}$, dan operasinya adalah komposisi pemetaan biasa. Kategori ini merupakan kategori abelian. Selanjutnya pada bagian ini akan dipaparkan tentang kategori homotopi kompleks-U atas $\mathcal{A}$.

Dari Lema 7 diketahui bahwa relasi homotop-$\left(U^X, U^Y\right), \simeq,$ adalah relasi ekivalen. Kemudian berdasarkan Lema 9, komposisi dua morfisma kompleks-U yang homotop-$U, \simeq,$ juga homotop-U, maka kita dapat mendefinisikan kategori homotopi kompleks sebagai berikut.

Definisi 10 (Kategori Homotopi Kompleks−U)
Kategori homotopi kompleks-U atas $\mathcal{A}$, dinotasikan dengan $\mathbf{K}(\mathcal{A}, U)$, adalah kategori yang objeknya berupa rantai kompleks-U atas $\mathcal{A}$, morfismanya adalah morfisma kompleks-U atas $\mathcal{A}$ modulo homotopi, dan operasi komposisinya adalah komposisi pemetaan biasa

Teorema 11
Kategori homotopi $\mathbf{K}(\mathcal{A}, U)$ merupakan kategori aditif.

Bukti
Misalkan $\left(X, U^X, d^X\right)$, $\left(Y, U^X, d^Y\right)$ dan $f, g \in Hom_{\mathbf{C}(\mathcal{A},U)}(X, Y)$

A1. Akan dibuktikan $Hom_{\mathbf{K}(\mathcal{A},U)}(X, Y)$ grup abel dan komposisi $Hom_{\mathbf{K}(\mathcal{A},U)}(X, Y) \times Hom_{\mathbf{K}(\mathcal{A},U)}(Y, Z)$ ™ $Hom_{\mathbf{K}(\mathcal{A},U)}(X, Z)$ bilinier atas $\mathbb{Z}$. Penjumlahan $\bar{f} + \bar{g}$ didefinisikan sebagai $f + g$ dengan f, g masing-masing adalah unsur di $\bar{f}$ dan $\bar{g}$. Karena $\mathbf{K}(\mathcal{A})$ kategori aditif maka $\bar{f} + \bar{g}$ memenuhi syarat pertama homotopi-U. Karena U_{n+1}^Y submodul maka $\bar{f} + \bar{g}$ memenuhi syarat kedua homotopi-U. Oleh karena itu $\bar{f} + \bar{g} \in Hom_{\mathbf{K}(\mathcal{A},U)}(X, Y)$. Persyaratan lainnya dari kategori abel dapat dibuktikan dengan mudah, begitu juga dengan pembuktian sifat bilinier.

A2. Objek nol di $\mathbf{K}(\mathcal{A}, U)$ adalah sama dengan objek nol di $\mathbf{C}(\mathcal{A}, U)$ yaitu kompleks-**0**, $\left(0_{\mathcal{A}}, 0_{\mathcal{A}}, \mathbf{0}\right)$ dengan $0_{\mathcal{A}}$ adalah objek nol pada kategori $\mathcal{A}$.

A3. Dari (4) diketahui koproduk dari X dan Y sebagai
$X \oplus Y = \left(X_n \oplus Y_n, U_n^{X \oplus Y}, d_n^{X \oplus Y}\right)_{n \in \mathbb{Z}}$

dengan $U_n^{X\oplus Y} = U_n^X \oplus U_n^Y$ dan $d_n^{X\oplus Y}(x,y) = \left(d_n^X(x), d_n^Y(y)\right)$ bersama morfisma $1_X : X_n \to X_n \oplus Y_n$ dan $1_Y : Y_n \to X_n \oplus Y_n$ dan memenuhi sifat universal: setiap objek Z di $\mathbf{C}(\mathcal{A},U)$ dan morfisma kompleks-U $f_X : X \to Z,$ $f_Y : Y \to Z$ adalah terdapat tunggal $f : X \oplus Y \to Z,$ terdapat tunggal morfisma kompleks-U, yang memenuhi $f_X = f1_X$ dan $f_Y = f1_Y$ sehingga diagram berikut komutatif:

$$\begin{tikzcd}
 & Z_n & \\
X_n \arrow[ur, "(f_X)_n"] \arrow[r, "(1_X)_n"] & X_n \oplus Y_n \arrow[u, "f_n"'] & Y_n \arrow[ul, "(f_Y)_n"'] \arrow[l, "(1_Y)_n"']
\end{tikzcd}$$

Karena relasi homotopi-U adalah relasi ekivalen dan tertutup terhadap operasi komposisi maka diagram dari kelas eivalen $1_X, 1_Y$ dan f berikut komutatif.

$$\begin{tikzcd}
 & Z_n & \\
X_n \arrow[ur, "(\bar{f}_X)_n"] \arrow[r, "(\bar{1}_X)_n"] & X_n \oplus Y_n \arrow[u, "\bar{f}_n"'] & Y_n \arrow[ul, "(\bar{f}_Y)_n"'] \arrow[l, "(\bar{1}_Y)_n"']
\end{tikzcd}$$

Dan jika terdapat $g : X \oplus Y \to Z$ sehingga $g1_X = f_X$ dan $g1_Y = f_Y$ maka maka $f \simeq g.$ Terbukti bahwa kategori homotopi kompleks-U adalah kategori aditif.

REFERENSI

[1] B.Davvaz dan Y.A Parnian – Gramaleky, 1999, A Note on Exact Sequence, Bull. Malaysian Math. Soc. (2) 22, 53-56.

[2] S.M. Anvariyeh dan B.Davvaz, 2002, U-Split Exact Sequence, Far East J. Math. Sci. (FJMS) 4 (2), 209-219.

[3] B.Davvaz dan H.Shabani-Solt, 2002, A generalization of Homological Algebra, J.Korean Math. Soc, 39 (6), 881-898.

[4] G. Elfiyanti, I. Muchtadi-Alamsyah, D. Nasution dan U.Amartiwi, 2015, Abelian Property of the Category of U-Complexes, Journal of Applied Mathematical Sciences, Hikari, submitted.

[5] C.A Weibel, 1994, An Introduction to Homological Algebra, Cambridge University Press, United Kingdom.

[6] T. Holm, P. Jørgensen dan R.Rouquier, 2010, Trianglated Categories, London Math.Soc. Lecture Note Series 375, Cambridge University Press.

[7] S. König dan Zimmermann, 1998, A. Derived Equivalences for Group Rings, Lecture Note In Mathematics 1685. Springer.

[8] D. Nasution, 2008, The Geometri of Chain Complexes, Master Thesis, ITB, Bandung.

[9] S.I. Gelfand dan Y.U.I. Manin, 1997, Methods of Homological Algebra, 2nd Editio, Heidelberg: Springer-Verlag.