Jurnal "LOG!K@" , Jilid 8, No. 2, 2018, Hal. 80 - 86
ISSN 1978 – 8568

PERMAINAN KOOPERATIF BENTUK KOALISI

Uun Suryani dan **M. Wakhid Musthofa**
Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga
Jl. Marsda Adisucipto No. 1 Yogyakarta 55281
uunanimath@gmail.com, mwakhid_m@yahoo.com

Abstract: The problems faced by the players involved in a game are how to choose the optimal strategies in order to obtain the maximum payoff. To meet these goals, one of the techniques is that each player exchangessome information they have and makes an agreement before they start the game. The players can generally achieve the better results (in terms of payoff or risk) when the player is in coalition or in cooperation with the other players. Coalition formed from this way can be viewed as a new entity with a shared decision. So the fair payoff division among the players who formed the coalition will be a next problem as an optimal solution of the game. In this article we use the Shapley value as a method of finding the optimal solution of the n-player game, based on a characteristic function.This method was applied in the case of a competition between three branches of the language course in Yogyakarta. The result shows that with such coalition each branch can guarantee himselfs to get at least the same payoff as they act independently (without coalition), so that it can avoid the maximum losses.
Keywords: *characteristic function, cooperative game, Shapley value.*

Abstrak: Permasalahan yang dihadapi oleh pemain yang terlibat dalam suatu permainan adalah bagaimana memilih strategi optimal agar memperoleh keuntungan yang maksimal. Untuk memenuhi tujuan tersebut, salah satu teknik yang digunakan adalah para pemain saling bertukar informasi dan membuat suatu perjanjian terikat sebelum mereka memulai permainan. Para pemain umumnya dapat mencapai hasil yang lebih baik (dari segi pendapatan ataupun resikonya) apabila pemain tersebut berkoalisi atau bekerjasama dengan pemain lainnya. Koalisi atau kerjasama yang terbentuk dapat dilihat sebagai suatu entitas baru dengan suatu keputusan bersama. Sehingga pembagian *payoff* yang adil diantara pemain yang membentuk koalisi menjadi masalah selanjutnya sebagai solusi permainan yang optimal. Dalam artikel ini nilai Shapley akan digunakan sebagai salah satu metode mencari solusi optimal untuk menyelesaikan permainan n-pemain, yang didasarkan pada suatu fungsi karakteristik. Metode ini diaplikasikan pada kasus persaingan tiga cabang tempat kursus bahasa Inggris di Kota Yogyakarta. Hasil perhitungan menunjukkan dengan berkoalisi masing-masing cabang dapat menjamin dirinya paling tidak memperoleh hasil yang sama dengan saat mereka beraksi secara mandiri (tidak berkoalisi) sehingga dapat menghindari kerugian yang maksimum.
Kata kunci: fungsi karakteristik, permainan kooperatif, nilai Shapley.

PENDAHULUAN

Teori permainan adalah studi tentang membuat keputusan yang optimal atas dasar kompetisi, dimana keputusan salah satu pemain mempengaruhi *outcome* situasi pemain lain yang terlibat [4]. Teori permainan ditandai dengan adanya dua atau lebih pemain atau penentu keputusan yang saling berinteraksi, dimana keputusan tersebut akan menjadi ancaman bagi lawannya dan berpengaruh terhadap pembayaran (*payoff*) atau resiko yang akan diperoleh oleh masing-masing pemain di akhir permainan [5]. Hal tersebut tentu mengandung konflik yang harus dipecahkan, sehingga teori permainan yang sudah diformulasikan sejak lama dapat menjadi alat untuk menganalisis mengapa suatu keputusan diambil dan bagaimana strategi dijalankan.

Dalam kehidupan nyata sering dijumpai persaingan yang memenuhi kriteria teori permainan. Diantaranya, dalam bidang ekonomi: adanya persaingan pedagang, persaingan perusahaan dalam menaikkan omset atau penghasilan perusahaan, dan dalam bidang politik: adanya kebijakan publik, jaringan telekomunikasi dan lain sebagainya. Setiap permainan mempunyai salah satu fitur utama dari dua fitur utama konflik permainan yaitu penekanan konflik terhadap strategi atau terhadap perolehan keuntungan. Seperti kasus persaingan yang dituntut untuk melakukan kerjasama agar dapat bertukar informasi dan membangun perjanjian terikat (teori kooperatif dengan *transferable utility*) atau pun tidak membangun perjanjian terikat (teori kooperatif dengan *non transferable utility*), maka fokus utama setiap pemain adalah kepada perolehan hasil akhir yang semaksimal mungkin. Salah satu cara merepresentasikan permainan tersebut yaitu dengan membentuk para pemain yang terlibat ke dalam bentuk koalisi, dengan harapan para pemain dapat saling memberi keuntungan.

PERMAINAN BENTUK KOALISI

Permainan bentuk koalisi merupakan bagian dari permainan kooperatif dengan adanya utilitas yang dipindahtangankan atau transfer utilitas (*cooperative game with transferable utility*). Terbentuknya koalisi menandakan setiap anggota koalisi telah menyepakati terhadap strategi pilihan bersama yang memungkinkan adanya pembayaran sampingan (*side payments*). Kesepakatan bersama tersebut akan mencakup kesepakatan tentang bagaimana para pemain menerima *payoff* akhir yang harus dibagikan diantara anggota koalisi [2]. Jumlah pemain yang terlibat pada permainan bentuk koalisi yaitu $n \geq 2$, sehingga ada kecenderungan bagi para pemain untuk membentuk koalisi demi mendukung kepentingan bersama, yang mana koalisi menjadi himpunan bagian dari semua pemain yang terlibat.

Menurut Roth [6], beberapa asumsi yang digunakan dalam permainan bentuk koalisi diantaranya: pertama setiap koalisi dapat menjamin anggotanya dalam jumlah tertentu, yang disebut dengan nilai koalisi. Kedua bahwa permainan kooperatif dengan banyak pemain, tidak ada batasan terhadap perjanjian yang mungkin dicapai diantara para pemain. Ketiga, semua *payoff* diukur dalam satuan yang sama dan terdapat transfer utilitas yang memungkinkan adanya pembayaran sampingan yang akan dibuat oleh para pemain. Pembayaran sampingan dapat digunakan sebagai suatu bujukan untuk beberapa pemain sehingga mereka mau menggunakan strategi tertentu yang saling menguntungkan. Dengan demikian, akan ada kecenderungan bagi para pemain yang menjadi targetnya dalam permainan untuk mendekati yang kemudian membentuk sekutu atau koalisi.

FUNGSI KARAKTERISTIK

Fungsi karakteristik merupakan nilai permainan atau harapan kemenangan koalisi tertentu. Fungsi karakteristik digunakan dalam menyelesaikan permainan n-pemain, dengan mengasumsikan adanya kerjasama diantara para pemain dan membentuk koalisi. Misalkan $n \geq 2$ menotasikan jumlah pemain pada permainan, yaitu 1 sampai n, dan misalkan N adalah himpunan para pemain, $N = \{1, 2, ..., n\}$. Sebuah koalisi S merupakan himpunan bagian dari N atau $S \subset N$. Himpunan seluruh koalisi dinotasikan dengan 2^N. Himpunan kosong $\varnothing$ juga merupakan koalisi atau disebut koalisi kosong. Himpunan N juga merupakan koalisi, yang disebut dengan koalisi besar (*grand coalition*). Misal, diberikan sebuah permainan dengan tiga pemain, *n*=3, maka $2^n = 2^3 = 8$. Artinya untuk permainan yang beranggotakan n=3 pemain, himpunan koalisi 2^N mempunyai $2^n = 8$ anggota koalisi. Berikut adalah definisi mengenai permainan bentuk koalisi [1]:

Definisi 1. *Permainan bentuk koalisi dengan tranferable utility adalah pasangan* (N,v) *dimana N adalah himpunan pemain yang terbatas dan* $v:2^n \to \mathbb{R}$ *adalah fungsi karakteristik, dengan* 2^n *adalah koalisi yang terbentuk, dimana* $S \subseteq N$.

Definisi 2 (Ferguson. 2014. IV-2). *Bentuk koalisi dari permainan dengan* n*-pemain ditunjukkan dengan pasangan* (N,v), *dimana* $N = \{1,2,.....,n\}$ *adalah suatu himpunan pemain dan v adalah fungsi bernilai real. Fungsi v disebut sebagai fungsi karakteristik dari suatu permainan. Fungsi v terdefinisi pada himpunan* 2^N, *atas semua koalisi yang mana koalisi tersebut merupakan subset dari N. Lebih lanjut, fungsi v memenuhi:*

(i) $v(\varnothing) = 0$, *dan*

(ii) Superaditif, jika S dan T koalisi disjoin $(S \cap T = \varnothing)$ *maka*

$$v(S) + v(T) \le v(S \cup T).$$

Definisi 2(i) mengatakatan bahwa nilai dari koalisi kosong adalah nol, karena tidak ada pemain yang dapat menjamin untuk meraih hasil. Sedangkan Kondisi (ii) mengatakan bahwa nilai dari koalisi besar (yang memuat semua pemain) dapat menjamin nilai yang lebih besar dari pada jumlah nilai dua koalisi.

Transformasi permainan dari bentuk normal ke bentuk koalisi mensyaratkan untuk menentukan nilai $v(S)$, untuk setiap koalisi $S \in 2^N$. Cara biasa untuk menetapkan fungsi karakteristik adalah dengan mendefinisikan nilai $v(S)$ sebagai nilai dari *two-person zero sum game* yang diperoleh ketika koalisi *S* bertindak sebagai salah satu pemain dan koalisi pelengkap $\overline{S}$ sebagai pemain lainnya. Andaikan, X adalah himpunan strategi untuk pemain pertama dan Y adalah himpunan strategi untuk pemain kedua, secara implisit koalisi *S* akan bertindak sebagai pemain *X* dan koalisi pelengkap $\overline{S} = N - S$ akan bertindak sebagai pemain *Y*. *Payoff* *S* adalah jumlah dari *payoff* untuk para pemain di $S : \sum_{i \in S} u_i(x_1,......,x_n)$, sehingga

$$\text{v}(S) = Val\left(\sum_{i \in S} u_i(x_1,......,x_n)\right).$$

Pemain yang tergabung dalam *S* akan memilih x_i untuk $i \in S$, dan pemain yang tergabung dalam $\overline{S}$ akan memilih x_i dengan $i \notin S$. Nilai $v(S)$ analog dengan *safety leve[1]l* untuk koalisi *S*.

METODE NILAI SHAPLEY

Nilai Shapley merupakan salah satu konsep solusi dalam menyelesaikan permainan *n*-pemain yang diperkenalkan oleh Lloyd Shapley pada 1953 sebagai bagian dari disertasi

[1] Salah satu konsep dari *zero-sum game* yang membawa lebih dan menemukan penggunaan penting pada *general-sum game.*

doktoralnya di Universitas Princeton [7]. Konsep nilai Shapley ini digunakan berdasarkan konsep fungsi karakteristik dan aksioma Shapley. Selain itu Shapley juga melihat nilai sebagai indeks untuk mengukur kekuatan pemain dalam sebuah permainan.

Sebuah fungsi nilai, ϕ, adalah fungsi yang mengawankan setiap fungsi karakteristik yang mungkin dibentuk dari permainan dengan *n*-pemain. Bentuk dari fungsi nilai adalah fungsi bernilai vektor $\phi(v)=(\phi_1,\phi_2,.......,\phi_n)$ dalam $\mathbb{R}^n$. Notasi $\phi_i(v)$ merepresentasikan harga atau nilai pemain ke-i dalam permainan dengan fungsi karakteristik *v*. Berikut adalah empat buah aksioma keadilan yang ditempatkan pada sebuah fungsi ϕ [3]:

Aksioma 1 *Efisiensi:* $\sum_{i\in N}\phi_i(v)=v(N)$.

Aksioma 2 *Simetri: Jika* i *dan* j *memenuhi kondisi*

$$v(S\cup\{i\})=v(S\cup\{j\}),$$

untuk setiap koalisi S yang tidak mengandung i *dan* j *maka* $\phi_i(v)=\phi_j(v)$.

Aksioma 3 *Dummy: Jika* i *memenuhi kondisi* $v(S)=v(S\cup\{i\})$ *untuk setiap koalisi* S *yang tidak mengandung* i, *maka* $\phi_i(v)=0$.

Aksioma 4 *Additivity: Jika u dan v adalah fungsi karakteristik, maka* $\phi(u+v)=\phi(u)+\phi(v)$.

Total nilai pemain adalah nilai dari koalisi terbesar (*grand coalition*), atau $v(N)$ yang merupakan jumlah pendapatan terbesar yang pemain bisa peroleh. Aksioma Simetri mengatakan bahwa pemain yang simetri akan mendapatkan *payoff* yang sama. Sedangkan Aksioma *Dummy* mengatakan bahwa pendapatan untuk pemain kosong adalah nol. Aksioma ini layak karena pemain yang tidak mengkontribusikan apa-apa seharusnya tidak mendapatkan apa-apa. Aksioma *Additivity* merupakan aksioma terkuat karena memberi gambaran bahwa nilai tengah dari dua permainan yang dimainkan pada saat yang sama harus merupakan penjumlahan dari nilai tengah permainan jika mereka bermain pada waktu yang berbeda.

Teorema 1 (Ferguson. 2014. IV-13)**.** *Terdapat fungsi tunggal* ϕ *yang memenuhi keempat aksioma Shapley.*

Berikut diberikan sebuah teorema yang merupakan cara alternatif untuk sampai pada nilai Shapley [3]:

Teorema 2 *Nilai Shapley dalam suatu permainan diberikan oleh persamaan* $\phi=(\phi_1,......,\phi_n)$, *dimana untuk setiap* $i=1,....n$,

$$\phi_i(v)=\sum_{\substack{S\subset N\\ i\in S}}\frac{(|S|-1)!(n-|S|)!}{n!}\left(v(S)-v(S-\{i\})\right).$$

CONTOH KASUS DAN PEMBAHASAN

English Caffe merupakan lembaga kursus bahasa Inggris terbesar Yogyakarta. Lembaga ini mempunyai tiga cabang. Kemampuan atau strategi yang dimiliki lembaga ini mampu membuatnya bertahan di tengah persaingan yang semakin tinggi. Tanggung jawab perkembangan setiap cabang dari lembaga tersebut ditanggung oleh masing-masing cabang. Hal ini membuat setiap cabang berusaha untuk mempertahankan lembaga tersebut dengan cara menarik pendaftar semaksimal mungkin agar terhindar dari kerugian. Tiga cabang dari English Caffe di Kota Yogyakarta adalah: English Caffe Larisolo yang berlokasi di Ruko Raflesia II, English Caffe Minke yang berlokasi di Jl. Sardjito, No.10, dan English Caffe Kene yang berlokasi di Jl. Kaliurang, km 13,5. Berikut ini diberikan nilai *payoff* masing-masing cabang berdasarkan strategi masing-masing pada bulan Agustus 2016 seperti disajikan pada Tabel 1 berikut (satuan utilitas dalam persen).

- Jika Laresolo memilih strategi “daftar 2 gratis 1”

Tabel 1. Laresolo: Strategi “daftar 2 gratis 1

		Minke	
		Free join English Caffe Ambassador	Free mengulang
Kene	Bebas menentukan jadwal sendiri	(4,1,3)	(2,1,2)
	Free mengulang	(3,1,2)	(5,2,2)

- Jika Laresolo memilih strategi “free mengulang seumur hidup”

Tabel 2. Laresolo strategi “free mengulang seumur hidup”,

		Minke	
		Free join English Caffe Ambassador	Free mengulang
Kene	Bebas menentukan jadwal sendiri	(1,1,2)	(2,3,2)
	Free mengulang	(2,2,3)	(3,2,3)

Untuk menyelesaikan masalah di atas diperlukan beberapa langkah. Langkah pertama adalah membentuk koalisi dari permainan di atas, kemudian langkah kedua mencari nilai masing-masing koalisi dengan merepresentasikan permainan ke dalam fungsi karakteristik dan langkah terakhir adalah mencari solusi optimal berikut pembagian nilai yang telah diperoleh berdasarkan fungsi karakteristik, menggunakkan metode nilai Shapley.

Sebelum menyajikan bentuk koalisi permainan, terlebih dahulu akan dipaparkan metrik dari permainan di atas. Andaikan, Laresolo sebagai Pemain I dengan strategi “daftar 2 gratis 1” (x_1) dan “free mengulang seumur hidup” (x_2), $X=\{x_1,x_2\}$, Kene sebagai Pemain II dengan stretegi “bebas menentukan jadwal sendiri” (y_1) dan “free mengulang seumur hidup” (y_2), $Y=\{y_1,y_2\}$, sedangkan Minke sebagai Pemain III dengan strategi “free join English

Caffe Ambassador" (z_1) dan strategi "mengulang seumur hidup" (z_2), $Z = \{z_1, z_2\}$. Berdasarkan pendefinisian strategi di atas, didapat matriks permainan sebagai berikut:

Table 3. Matriks *Payoffs* Tiga Pemain

Strategi pemain			***Payoff***			**Total**
X	Y	Z	X	Y	Z	
x_1	y_1	z_1	4	1	3	8
x_1	y_1	z_2	2	1	2	5
x_1	y_2	z_1	3	1	2	6
x_1	y_2	z_2	5	2	2	9
x_2	y_1	z_1	1	3	2	6
x_2	y_1	z_2	2	3	2	7
x_2	y_2	z_1	2	2	3	7
x_2	y_2	z_2	3	2	3	8

1) Bentuk Koalisi

   Berdasarkan Definisi 1, terdapat delapan koalisi yang terbentuk dari tiga pemain. Yaitu: koalisi pertama $S_1 = \varnothing$, koalisi kedua $S_2 = \{\text{I}\}$, koalisi ketiga $S_3 = \{\text{II}\}$, koalisi keempat $S_4 = \{\text{III}\}$, koalisi kelima $S_5 = \{\text{I}, \text{II}\}$, koalisi keenam $S_6 = \{\text{I}, \text{III}\}$, koalisi ketujuh $S_7 = \{\text{II}, \text{III}\}$, dan koalisi kedelapan $S_8 = \{\text{I}, \text{II}, \text{III}\}$.

2) Fungsi Karakteristik

   Berdasarkan konsep terkait transformasi bentuk normal ke bentuk koalisi, perhitungan fungsi karakteristik dibangun dengan mendefinisikan setiap koalisi yang bersaing sebagai sebagai *two-person zero-sum game*[2]. Artinya pemain baris sebagai koalisi yang akan mencapai pada nilai fungsi karakteristik. Oleh karena itu, kedelapan koalisi di atas akan ada 4 kemungkinan kelompok bersaing. Diantaranya: $S_1 = \{\varnothing\}$ melawan $S_8 = \{\text{I}, \text{II}, \text{III}\}$, $S_2 = \{\text{I}\}$ melawan $S_7 = \{\text{II}, \text{III}\}$, $S_3 = \{\text{II}\}$ melawan $S_6 = \{\text{I}, \text{III}\}$, dan $S_4 = \{\text{III}\}$ melawan $S_5 = \{\text{I}, \text{II}\}$. Diperoleh nilai fungsi karakteristik untuk masing-masing koalisi yaitu, $v(\varnothing) = 0,\ v(S_2) = 2,\ v(S_3) = 1,\ v(S_4) = 0,\ v(S_5) = 4\frac{3}{5}$, $v(S_6) = 5\frac{4}{5},\ v(S_7) = 0,\ v(N) = 9.$

   Nilai koalisi terbesar yaitu koalisi dengan anggotanya adalah semua pemain (Laresolo, Kene dan Minke), jika nilai koalisi dibagi jumlah anggota dalam koalisi tersebut, $^9/_3$ maka hasil yang diperoleh lebih besar dari pada nilai yang diperoleh ketika ketiganya beraksi secara sendiri-sendiri.

3) Nilai Shapley

---

[2] Kemenangan dari pemain satu merupakan kekalahan bagi pemain lainnya, sehingga jumlah *payoff* dari keduanya adalah nol.

Melalui Teorema 1, dimana |S| adalah jumlah anggota koalisi S_i, dan n adalah banyaknya jumlah pemain yang terlibat dalam permainan, sedangkan $\left(v\left(S\right)-v\left(S-\{i\}\right)\right)$ adalah selisih antara nilai koalisi S dan nilai dari koalisi S tanpa pemain i sebagai *payoff* harapan pemain ke i dengan probabilitas dia masuk ke koalisi tersebut sebesar $\frac{(|S|-1)!(n-|S|)!}{n!}$. Maka $\phi_i\left(v\right)$ adalah *payoff* rata-rata pemain ke i. Diperoleh *payoff* rata-rata masing-masing cabang yaitu, $\phi_{Laresolo}\left(v\right)=5,24$ atau 52,4 persen, $\phi_{Kene}\left(v\right)=1,83$ atau 18,3 persen, dan $\phi_{Minke}\left(v\right)=1,93$ atau 19,3 persen.

Jadi vektor nilai Shapley ketiga Cabang adalah $\phi=\left(5,24;1,83;1,93\right)$. Dengan total dari nilai ketiganya adalah 9 atau 90 persen.

KESIMPULAN

Konsep fungsi karakteristik merupakan konsep kerjasama yang terbentuk diantara pemain, dengan $n \geq 2$, dan berdasarkan pada konsep himpunan, anggota himpunan yang terlibat dalam kerjasama disebut sebagai sebuah koalisi *S*. dimana $S \subset N=\{1,2,.....,n\}$. Metode nilai Shapley merupakan metode mencari solusi yang optimal untuk permainan kooperatif bentuk koalisi berdasarkan pada konsep fungsi karakteristik dan aksioma-aksioma Shapley.

Metode nilai Shapley yang diaplikasikan terhadap kasus persaingan ketiga cabang dari lembaga kursus Bahasa Inggris di Yogyakarta menghasilkan pembagian yang optimal. Karena pembagian nilai *payoff* yang dihasilkan dari kerja sama ini bergantung pada kontribusi masing-masing cabang, hanya saja ketika mereka membuat suatu kerjasama dan berkoalisi, mereka dapat menjamin dirinya untuk paling tidak memperoleh hasil dari nilainya ketika beraksi secara sendiri dan menghindari kerugian yang maksimum.

REFERENSI

[1] Brown, K.L., dan Shoham, Y., 2008, *Essentials of Game Theory,* Morgan & Claypool Publishers, California USA.

[2] Binmore, K, 2007, *Playing For Real A text on Game Theory*, Oxford University Press, Inc., New York.

[3] Ferguson, T.S., 2014, *Game Theory*, 2nd Edition, Mathematics Department, UCLA. www.math.ucla.edu/~tom/Game_Theory/Contents.html

[4] Griffin, C., 2012, *Game Theory: Penn State Math 486 Lecture Notes*, version 1.1.1. www.personal.psu.edu/cxg286/Math486.

[5] Rapoport, A., 1970, *N-Person Game Theory Concept and Applications*, The University of Michigan Press, USA.

[6] Roth, A. E., 1988, *The Shapley Value,* Cambridge Unversity Press, New York.

[7] Shapley, L. S., 1953, "A Value for n-Person Games" in *Contributions to the Theory of Games*, volume II, H.W. Kuhn and A.W. Tucker (eds.), 307-317, Princeton University Press.