Jurnal "LOG!K@" , Jilid 6, No. 2, 2016, Hal. 84 - 95
ISSN 1978 – 8568

DEKOMPOSISI (a, d)-P_4-ANTIAJAIB SUPER PADA GRAF *GENERALIZED* PETERSEN

M. Irvan Septiar Musti, Nur Inayah, dan Irma Fauziah
Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Syarif Hidayatullah Jakarta
Email: irvanseptiar@gmail.com

Abstract: This research will construct a decomposition (a, d)-H-antimagic. Decomposition (a, d)-H-antimagic is a bijective function which is mapping set of vertex and edge in graph G to positive integer ($\varphi : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1,2, \ldots, v_G + e_G\}$) that comply $\{\varphi(H) | H \in \mathcal{H}\} = \{a, a + d, a + 2d, \ldots, a + (l - 1)d\}$ for two certain positive integers a and d, and l is the amount of subgraph H in G. In this research, H refers to $H = P_4$.
The aim of this research is to determine decomposition (a, d)-P_4-super antimagic of generalized Petersen graph ($GP_{n,m}$) for $n \geq 5$, n odd and m = 2. The author is using literature and experiment study as the research method. This research produced 4 theorems that explain decomposition (a, d)-P_4-super antimagic in generalized Petersen graph with $d = 1,2,3,4$.
Keywords: *Decomposition, Super Antimagic, P_4, Generalized Petersen Graph.*

Abstrak: Penelitian ini mengkonstruksi sebuah dekomposisi (a, d)-H-antiajaib. Dekomposisi (a, d)-H-antiajaib adalah suatu fungsi bijektif yang memetakan himouan titik dan sisi pada graf G ke bilangan bulat positif ($\varphi : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1,2, \ldots, v_G + e_G\}$) yang memenuhi $\{\varphi(H) | H \in \mathcal{H}\} = \{a, a + d, a + 2d, \ldots, a + (l - 1)d\}$ untuk dua bilangan bulat positif a dan d tertentu serta l adalah banyaknya subgraf H di G. H yang dimaksud adalah $H = P_4$. Tujuan penelitian ini adalah untuk menentukan dekomposisi (a, d)-P_4-antiajaib super pada graf generalized Petersen ($GP_{n,m}$) untuk $n \geq 5$, n ganjil dan m = 2. Penelitian ini menghasilkan 4 teorema dekomposisi (a, d)-P_4-antiajaib super pada graf generalized Petersen dengan $d = 1,2,3,4$.
Kata kunci: *Dekomposisi, Antiajaib Super, P_4, Graf Generalized Petersen.*

PENDAHULUAN

Teori graf pertama kali muncul karena adanya permasalahan pada jembatan *Konigsbreg*, sebuah jembatan di kota Kaliningrad, Rusia (dahulu Prusia). Masalah pada jembatan *Konigsbreg* adalah kemungkinan bisa atau tidaknya melewati tujuh jembatan di kota tersebut dengan tepat satu kali yang menghubungkan empat buah daratan. Pada tahun 1763, Leonhard Euler memecahkan permasalahan tersebut dengan menggunakan titik sebagai representasi dari daratan dan garis yang menghubungkan titik sebagai representasi dari masing-masing jembatan. Representasi titik (*vertex*) dan sisi (*edge*) yang diperkenalkan oleh Euler pada permasalahan tersebut dikenal sebagai Graf.

Jenis-jenis dari suatu graf semakin banyak dan semakin beragam. Hal ini ditandai dengan adanya graf sederhana, graf berarah dan juga graf reguler. Graf reguler berderajat k

didefinisikan sebagai graf yang setiap titiknya mempunyai derajat yang sama yaitu k. Graf *generalized* Petersen $(GP_{n,m})$, $n \geq 3$, $1 \leq m \leq \left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor$, adalah sebuah $3-$ graf regular dengan $2n$ titik $\{v_1, \dots, v_n\}, \{u_1, \dots, u_n\}$ dan tiga macam sisi yaitu $u_i u_{(i+2) mod\, n}$ (sisi dalam), $u_i v_i$ (jeruji), dan $v_i v_{(i+1) mod\, n}$ (sisi luar) dengan n menyatakan banyaknya titik luar yang sama dengan banyaknya titik dalam dan nilai m menyatakan lompatan sisi dalam pada graf tersebut. Graf *generalized* Petersen pertama kali diperkenalkan oleh Watkins [3].

Dekomposisi pada graf merupakan perluasan dari tema pelabelan dalam graf. Suatu pelabelan antiajaib pada graf *G* yang memuat suatu dekomposisi-*H*, ditulis dekomposisi (a, d)-*H*-antiajaib adalah suatu fungsi bijektif yang memetakan himpunan titik dan sisi pada graf *G* ke bilangan bulat positif $(\varphi : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1,2, \dots, v_G + e_G\})$ yang memenuhi $\{\varphi(H) | H \epsilon \mathcal{H}\} = \{a, a + d, a + 2d, \dots, a + (l - 1)d\}$ untuk dua bilangan bulat positif a dan d tertentu serta l adalah banyaknya subgraf H di G.

Permasalahan dalam paper ini adalah bagaimana mengkonstruksi dekomposisi (a, d)-P_4-antiajaib super pada graf *generalized* Petersen $\left(GP_{n,m}\right)$, dengan $n \geq 5$, n ganjil, dan $m = 2$.

TINJAUAN PUSTAKA

Terminologi Graf

Graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V, E) ditulis dengan notasi $G = (V, E)$. V dalam hal ini merupakan himpunan tidak kosong dari titik- titik dan E adalah himpunan sisi yang mungkin kosong dan menghubungkan sepasang titik [4].

Suatu graf G dikatakan kosong (*null* graf) jika $E = \emptyset$ [1]. Dari definisi tersebut menyatakan bahwa dalam suatu graf, himpunan titik V tidak boleh kosong, akan tetapi himpunan sisi E dimungkinkan kosong. Hal ini menandakan bahwa sebuah graf harus memiliki paling sedikit satu buah titik dan dimungkinkan tidak memiliki sisi. Graf yang hanya memiliki sebuah titik disebut graf trivial.

Banyaknya unsur pada himpunan titik disebut dengan *size* dan dinotasikan dengan $|V(G)|$, sedangkan banyaknya unsur pada himpunan sisi disebut dengan *order* dan dinotasikan dengan $|E(G)|$. Graf yang memiliki *size* $v_G = |V(G)|$ dan *order* $e_G = |E(G)|$ dapat ditulis dengan $(v_G, e_G) -$ Graf [2].

Definisi Subgraf
Sebuah graf *H* adalah subgraf dari graf *G* jika setiap titik pada *H* adalah titik di *G* dan setiap sisi pada *H* adalah sisi di *G*. Dengan kata lain, $V(H) \subseteq V(G)$ dan $E(H) \subseteq E(G)$ [2].

Graf Lintasan dan Graf *Generalized* Petersen

Graf lintasan yang dinotasikan P_n adalah suatu graf dengan *n* titik yaitu $v_1, v_2, \dots, v_n$ dan $n - 1$ sisi $(v_1 v_2), (v_2 v_3), \dots, (v_{n-1} v_n)$. Kemudian, Graf *generalized* Petersen $(GP_{n.m})$ $n \geq 3$, $1 \leq m \leq \left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor$, adalah sebuah $3 -$ graf regular dengan $2n$ titik $\{v_1, \dots, v_n\}, \{u_1, \dots, u_n\}$ dan tiga macam sisi yaitu $u_i u_{(i+2) mod\, n}$ (sisi dalam), $u_i v_i$ (jeruji), dan $v_i v_{(i+1) mod\, n}$ (sisi luar) dengan

n menyatakan banyaknya titik luar yang sama dengan banyaknya titik dalam dan nilai m menyatakan lompatan sisi dalam pada graf tersebut [5].

Pelabelan Total $(a.d)$-H-Antiajaib

Misalkan $G=(V(G),E(G))$ dan $H=(V(H),E(H))$ graf berhingga dan memiliki selimaut-*H*. Pelabelan total $(a.d)$-H-antiajaib adalah fungsi bijektif $\xi:V(G)\cup E(G)\rightarrow\{1,2,\ldots,v_G+e_G\}$ sedemikian sehingga untuk setiap subgraf H' yang isomorfik dengan *H*, himpunan bobot dari *H* adalah

$$\xi(H')=\sum_{v\in V(H')}g(v)+\sum_{e\in E(H')}g(e)$$

Bobot setiap selimutnya membentuk barisan aritmatika $\{a,a+d,a+2d,\ldots,a+(l-1)d\}$ dengan *d* menyatakan jarak dan *l* menyatakan suatu bilangan subgraf isomorfik H, nilai a dan *d* adalah bilangan bulat positif. Kemudian ξ dikatakan pelabelan $(a.d)$-H-antiajaib super jika $\xi(V(G))=\{1,2,\ldots,v_G\}$ atau dengan kata lain pelabelan $(a.d)$-H-antiajaib dikatakan super jika titik merupakan label terkecil pada graf tersebut [6].

Dekomposisi

Suatu graf *G* dikatakan terdekomposisi menjadi $H_1, H_2, H_3, \ldots., H_K$, jika dua buah subgraf H_i dan H_j dengan $i \neq j$ tidak memiliki sisi yang bersisian dan gabungan semua subgraf H_i adalah *G* [1]. Suatu keluarga $\mathcal{H}=\{H_1,H_2,H_3,\ldots,H_l\}$ dari subgraf *G* dikatakan suatu dekomposisi-*H* dari *G*, jika Hi isomorfik dengan H, $1\le i\le l$, $E(H_i)\cap E(H_j)=\varnothing$ untuk $i\neq j$ dan $\bigcup_{i=1}^{l}E(H_i)=E(G)$. Dalam hal ini ditulis $G=H_1\oplus\ldots\oplus H_k$ dan *G* dikatakan terdekomposisi-*H* atau dengan kata lain *G* memuat suatu dekomposisi-*H*.

Suatu pelabelan antiajaib pada graf *G* yang memuat suatu dekomposisi-*H*, ditulis dekomposisi *H*-antiajaib adalah suatu fungsi bijektif yang memetakan himpunan titik dan sisi pada graf *G* ke bilangan bulat positif $(\varphi : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1,2,\ldots,v_G+e_G\})$ yang memenuhi $\{\varphi(H)|H \in \mathcal{H}\}=\{a, a+d, a+2d, \ldots, a+(l-1)d\}$ untuk dua bilangan bulat positif a dan d tertentu serta l adalah banyaknya subgraf H di G. Dalam hal ini $\varphi(H)$ dikatakan bobot dari H (bobot-*H*), didefinisikan sebagai $\varphi(H)=\sum_{v\in V(H)}\varphi(v)+\sum_{e\in E(H)}\varphi(e)$. Kemudian, φ dikatakan *dekomposisi* $(a.d)$-H-antiajaib super, jika $\varphi(V(G))=\{1,2,\ldots,v_G\}$ atau dengan kata lain bobot titik merupakan bobot terkecil pada graf tersebut.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Langkah awal yang dilakukan dalam penelitian ini adalah menentukan selimut pada graf *generalized* Petersen berupa graf lintasan (P_4), kemudian melabeli titik-titik dan sisi-sisi graf *generalized* Petersen dengan bilangan bulat positif pada graf tersebut. Setelah itu, peneliti menghitung bobot masing-masing selimut sehingga membentuk deret aritmatika dan kemudian mengkonstruksi dekomposisi (a, d)-P_4-antiajaib super pada graf *generalized* Petersen.

Hasil dari penelitian ini berupa empat teorema baru yang ditemukan secara eksperimental yang akan disajikan dengan paparan teorema. Empat teorema yang merupakan hasil dari penelitian ini dikelompokkan sesuai dengan nilai d yang didapat dalam penelitian ini.

TEOREMA 1 *Pada Graf Generalized Petersen* $(GP_{n,2})$ *terdapat dekomposisi selimut* $(14n + 4, 1)$-P_4-*antiajaib super.*

Bukti. Setiap titik dan sisi dipetakan ke himpunan bilangan bulat positif oleh fungsi f_r seperti pelabelan di bawah ini,

$$f_r(v_i) \qquad 2n + (1 - i) \qquad \text{untuk } i \in [1, n]$$

$$f_r(u_i) \qquad \begin{cases} & \text{untuk } i = 1 \\ & \text{untuk } i \in [2, n] \end{cases}$$

$$f_r(u_i u_{(i+2) mod\, n}) \qquad 4n + i \qquad \text{untuk } i \in [1, n]$$

$$f_r(v_i v_{(i+1) mod\, n}) \qquad \begin{cases} 2n + 2 + i & \text{untuk } i \in [1, n - 2] \\ n + i + 2 & \text{untuk } i \in [n - 1, n] \end{cases}$$

$$f_r(u_i v_i) \qquad \begin{cases} 4n - i & \text{untuk } i \in [1, n - 1] \\ 4n & \text{untuk } i = n \end{cases}$$

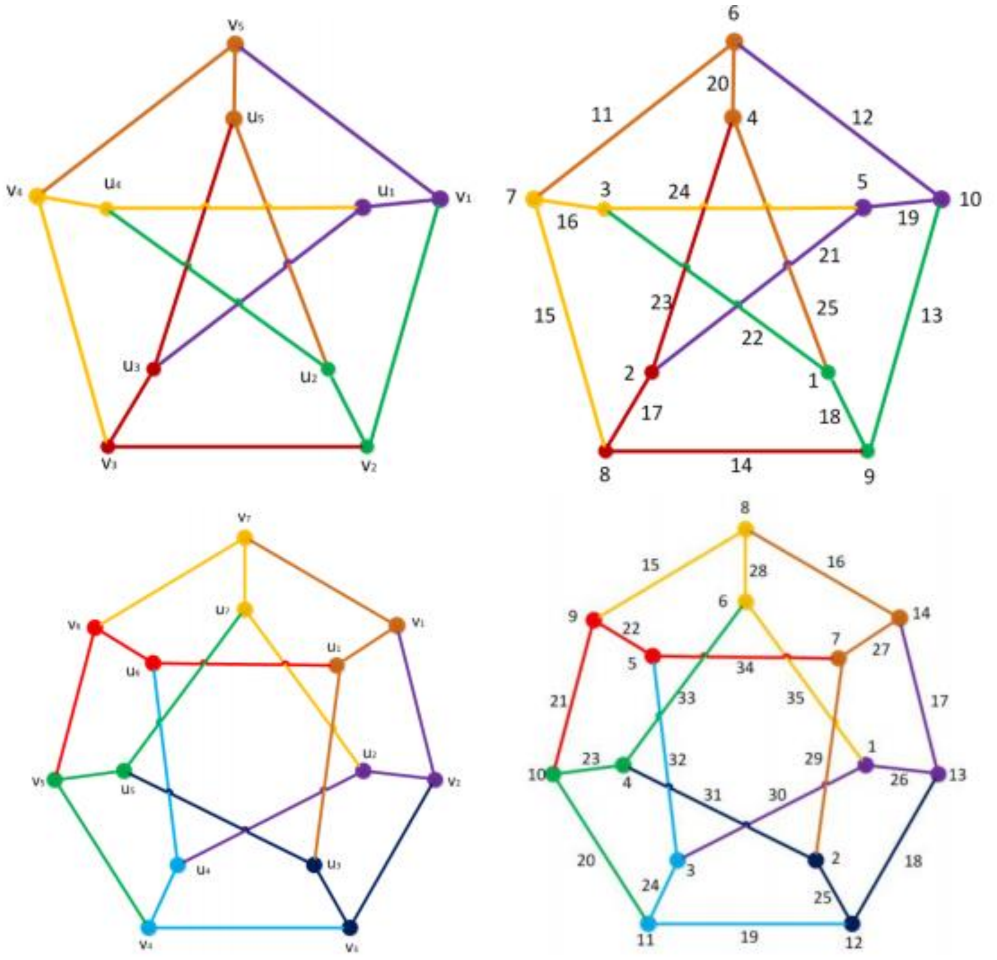
Pola bobot $\left(w\left(P_4^i\right)\right)$ masing-masing selimut pada graf *generalized* Petersen adalah sebagai berikut:

$$w\left(P_4^i\right) \begin{cases} f_r(u_2) + f_r\left(u_{(i+1)}\right) + f_r\left(v_{(i+1)}\right) + f_r(v_i) + f_r\left(u_{(i+1)} u_2\right) \\ \quad + f_r\left(u_{(i+1)} v_{(i+1)}\right) + f_r\left(v_i v_{(i+1)}\right), \text{untuk } i = n - 1 \\ f_r(u_1) + f_r\left(u_{(i+1)}\right) + f_r\left(v_{(i+1)}\right) + f_r(v_i) + f_r\left(u_{(i+1)} u_1\right) \\ \quad + f_r\left(u_{(i+1)} v_{(i+1)}\right) + f_r\left(v_i v_{(i+1)}\right), \text{untuk } i = n - \ 2 \\ f_r\left(u_{(i+1)}\right) + f_r\left(u_{(i+3)}\right) + f_r\left(v_{(i+1)}\right) + f_r(v_i) + f_r\left(u_{(i+1)} u_{(i+3)}\right. \\ \quad + f_r\left(u_{(i+1)} v_{(i+1)}\right) + f_r\left(v_i v_{(i+1)}\right), \text{untuk } i = [1, n - 3] \\ f_r(u_1) + f_r(u_3) + f_r(v_1) + f_r(v_i) + f_r(u_1 u_3) \\ \quad + f_r(u_1 v_1) + f_r(v_i v_1), \text{untuk } i = n \end{cases}$$

Berdasarkan pola bobot pelabelan di atas diperoleh $w\left(P_4^i\right)$ masing-masing selimut (P_4) pada graf *generalized* Petersen adalah sebagai berikut:

$$
w\left(P_4^i\right) = \begin{cases} 14n + i + 5 & \text{untuk } i = [1, n-3] \\ 15n + 3 & \text{untuk } i = n-2 \\ 13n + i + 5 & \text{untuk } i = n-1 \\ 14n + 5 & \text{untuk } i = n \end{cases}
$$

Berdasarkan bobot selimut $w\left(P_4^i\right)$ diatas diperoleh dekomposisi (a, d)-P_4-antiajaib super pada graf *generalized* Petersen $(GP_{n,m})$ dengan $n \geq 5$, n ganjil dan $m = 2$, dengan $a = 14n + 4$ dan $d = 1$. Ilustrasi dekomposisi (a, d)-P_4-antiajaib super dengan $d = 1$ pada graf generalized Petersen $GP_{5,2}$ dan $GP_{7,2}$ terdapat pada Gambar 1.



Gambar 1. Ilustrasi dekomposisi (a, d)-P_4-antiajaib super pada $GP_{5,2}$ dan $GP_{7,2}$ dengan $d = 1$.

TEOREMA 2 *Pada Graf Generalized Petersen* $(GP_{n,2})$ *terdapat dekomposisi selimut* $\left(\frac{1}{2}(27n + 9), 2\right)$-$P_4$-*antiajaib super.*

Bukti. Setiap titik dan sisi dipetakan ke himpunan bilangan bulat positif oleh fungsi f_s seperti pelabelan di bawah ini,

$$f_s(v_i) \begin{cases} \frac{1}{2}(3n+2-i) & \text{untuk } i \in [1,n], i\ ganjil \\ \frac{1}{2}(4n+2-i) & \text{untuk } i \in [1,n], i\ genap \end{cases}$$

$$f_s(u_i) \begin{cases} & \text{untuk } i \in [1,2] \\ & \text{untuk } i \in [3,n] \end{cases}$$

$$f_s(u_i u_{(i+2) mod\, n}) \begin{cases} 4n+3-i & \text{untuk } i \in [1,2] \\ 5n+3-i & \text{untuk } i \in [3,n] \end{cases}$$

$$f_s(v_i v_{(i+1) mod\, n}) \begin{cases} 2n+i+1 & \text{untuk } i \in [1,n-1] \\ 2n+1 & \text{untuk } i = n \end{cases}$$

$$f_s(u_i v_i) \begin{cases} 4n & \text{untuk } i = 1 \\ 3n+(i-1) & \text{untuk } i \in [2,n] \end{cases}$$

Pola bobot $\left(w(P_4^i)\right)$ masing-masing selimut pada graf *generalized* Petersen adalah sebagai berikut:

$$w(P_4^i) = \begin{cases} f_s(u_2) + f_s(u_{(i+1)}) + f_s(v_{(i+1)}) + f_s(v_i) + f_s(u_{(i+1)}u_2) \\ \quad + f_s(u_{(i+1)}v_{(i+1)}) + f_s(v_i v_{(i+1)}), \text{untuk } i = n-1 \\ f_s(u_1) + f_s(u_{(i+1)}) + f_s(v_{(i+1)}) + f_s(v_i) + f_s(u_{(i+1)}u_1) \\ \quad + f_s(u_{(i+1)}v_{(i+1)}) + f_s(v_i v_{(i+1)}), \text{untuk } i = n-2 \\ f_s(u_{(i+1)}) + f_s(u_{(i+3)}) + f_s(v_{(i+1)}) + f_s(v_i) + f_s(u_{(i+1)}u_{(i+3)}) \\ \quad + f_s(u_{(i+1)}v_{(i+1)}) + f_s(v_i v_{(i+1)}), \text{untuk } i = [1,n-3] \\ f_s(u_1) + f_s(u_3) + f_s(v_1) + f_s(v_i) + f_s(u_1 u_3) \\ \quad + f_s(u_1 v_1) + f_s(v_i v_1), \text{untuk } i = n \end{cases}$$

Berdasarkan pola bobot pelabelan di atas diperoleh $w(P_4^i)$ masing-masing selimut (P_4) pada graf *generalized* Petersen adalah sebagai berikut:

$$w(P_4^i) = \begin{cases} \frac{1}{2}(27n - 4i + 13) & \text{untuk } i = 1 \\ \frac{1}{2}(31n - 4i + 13) & \text{untuk } i \in [2, n-3] \\ \frac{1}{2}(29n - 2i + 17) & \text{untuk } i = n-2 \\ \frac{1}{2}(29n - 2i + 15) & \text{untuk } i = n-1 \\ \frac{1}{2}(28n - i + 13) & \text{untuk } i = n \end{cases}$$

Berdasarkan bobot selimut $w(P_4^i)$ diatas diperoleh dekomposisi (a, d)-P_4-antiajaib super pada graf *generalized* Petersen $(G\,P_{n,m})$ dengan $n \geq 5$, n ganjil dan $m = 2$, dengan $a = \frac{1}{2}(27n + 9)$ dan $d = 2$. Ilustrasi dekomposisi (a, d)-P_4-antiajaib super dengan d = 2 pada graf generalized Petersen $GP_{5,2}$ dan $GP_{7,2}$ terdapat pada Gambar 2.

TEOREMA 3 *Pada Graf Generalized Petersen* $(G\,P_{n,2})$ *terdapat dekomposisi selimut (13n+5,3)-*P_4*-antiajaib super.*

Bukti. Setiap titik dan sisi dipetakan ke himpunan bilangan bulat positif oleh fungsi f_t seperti pelabelan di bawah ini,

$$f_t(v_i) = 2n + (1 - i) \qquad \text{untuk } i \in [1, n]$$

$$f_t(u_i) = \begin{cases} 3 - i & \text{untuk } i \in [1,2] \\ n + 3 - i & \text{untuk } i \in [3, n] \end{cases}$$

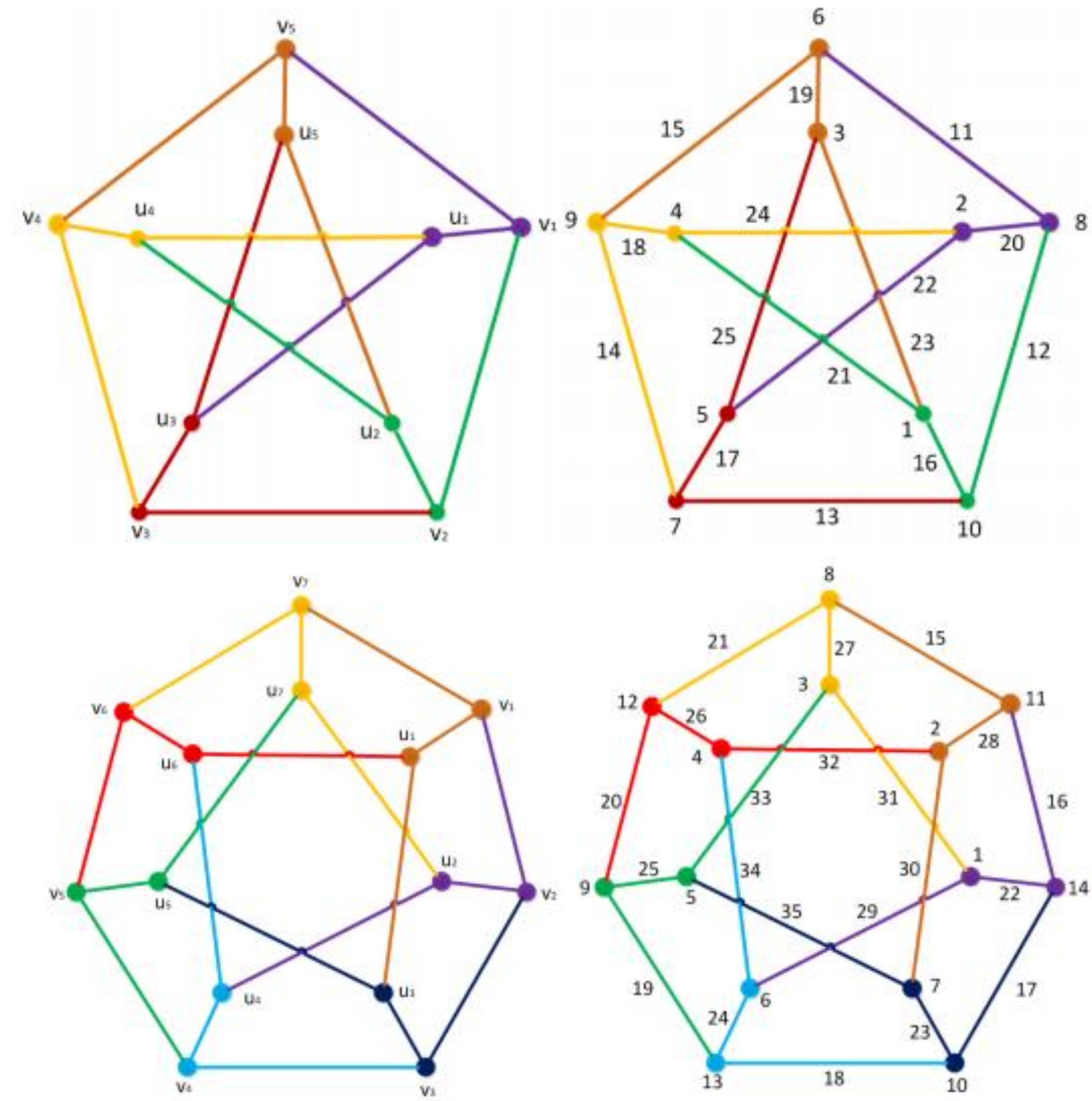
$$f_t(u_i u_{(i+2) mod\, n}) = 5n + 1 - i \qquad \text{untuk } i \in [1, n]$$

$$f_t(v_i v_{(i+1) mod\, n}) = \begin{cases} 3n & \text{untuk } i = 1 \\ 2n + i - 1 & \text{untuk } i \in [2, n] \end{cases}$$

$$f_t(u_i v_i) = \begin{cases} 4n & \text{untuk } i = 1 \\ 3n + (i - 1) & \text{untuk } i \in [2, n] \end{cases}$$

Pola bobot $\left(w(P_4^i)\right)$ masing-masing selimut pada graf *generalized* Petersen adalah sebagai berikut:

$$w(P_4^i) = \begin{cases} f_t(u_2) + f_t(u_{(i+1)}) + f_t(v_{(i+1)}) + f_t(v_i) + f_t(u_{(i+1)}u_2) \\ \quad + f_t(u_{(i+1)}v_{(i+1)}) + f_t(v_iv_{(i+1)}), \text{untuk } i = n-1 \\ \\ f_t(u_1) + f_t(u_{(i+1)}) + f_t(v_{(i+1)}) + f_t(v_i) + f_t(u_{(i+1)}u_1) \\ \quad + f_t(u_{(i+1)}v_{(i+1)}) + f_t(v_iv_{(i+1)}), \text{untuk } i = n-2 \\ \\ f_t(u_{(i+1)}) + f_t(u_{(i+3)}) + f_t(v_{(i+1)}) + f_t(v_i) + f_t(u_{(i+1)}u_{(i+3)}) \\ \quad + f_t(u_{(i+1)}v_{(i+1)}) + f_t(v_iv_{(i+1)}), \text{untuk } i = [1, n-3] \\ \\ f_t(u_1) + f_t(u_3) + f_t(v_1) + f_t(v_i) + f_t(u_1u_3) \\ \quad + f_t(u_1v_1) + f_t(v_iv_1), \text{untuk } i = n \end{cases}$$

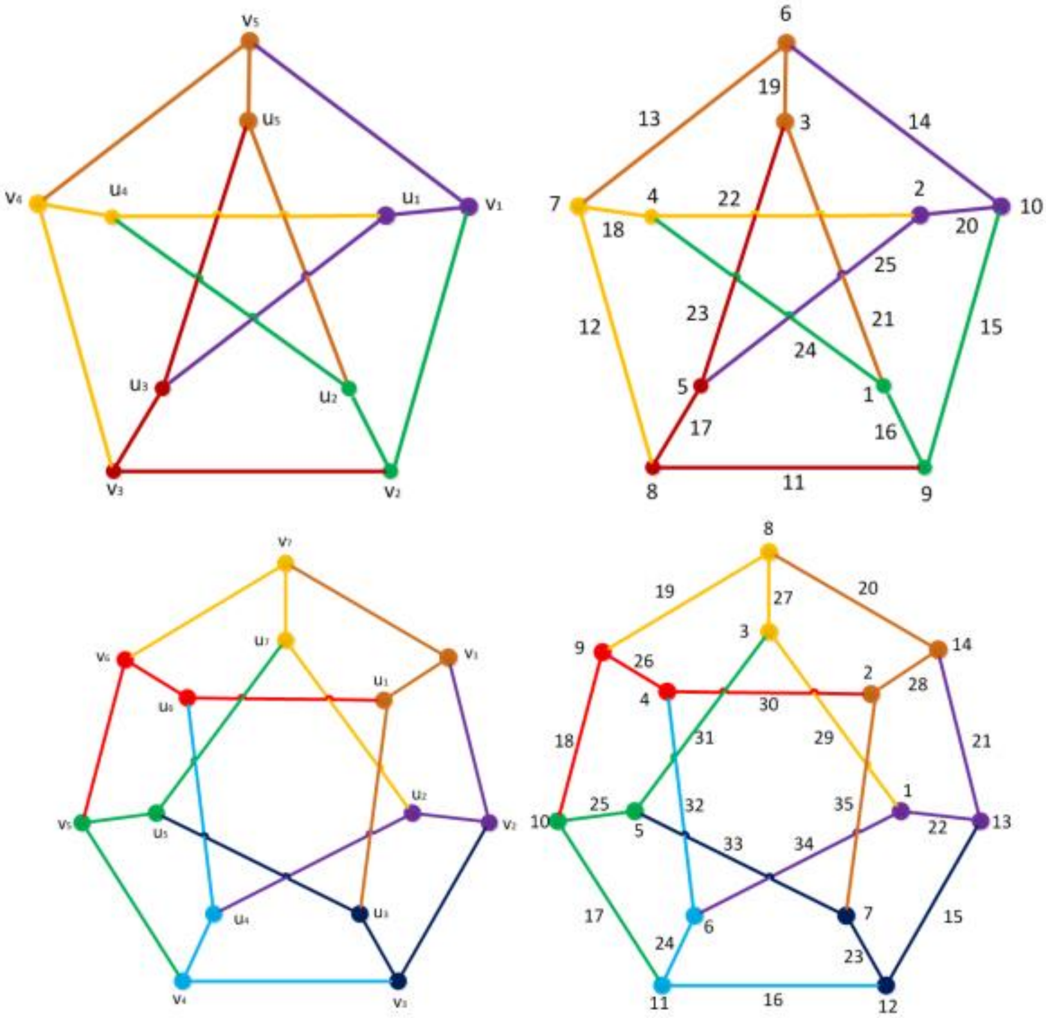


Gambar 2. Ilustrasi dekomposisi (a,d)-P_4-antiajaib super pada $GP_{5,2}$ dan $GP_{7,2}$ dengan $d = 2$.

Berdasarkan pola bobot pelabelan di atas diperoleh $w(P_4^i)$ masing-masing selimut (P_4) pada graf *generalized* Petersen adalah sebagai berikut:

$$w(P_4^i) = \begin{cases} 15n - 2i + 3 & \text{untuk } i = n-1 \\ 15n - 2i + 4 & \text{untuk } i = n-2 \\ 16n - 3i + 2 & \text{untuk } i \in [2, n-3] \\ 16n - 4i + 3 & \text{untuk } i = 1 \\ 16n + 2 & \text{untuk } i = n \end{cases}$$

Berdasarkan bobot selimut $w(P_4^i)$ diatas diperoleh dekomposisi (a, d)-P_4-antiajaib super pada graf *generalized* Petersen $(GP_{n,m})$ dengan $n \geq 5$, n ganjil dan $m = 2$, dengan $a = 13n + 5$ dan $d = 3$. Ilustrasi dekomposisi (a, d)-P_4-antiajaib super dengan d = 3 pada graf generalized Petersen $GP_{5,2}$ dan $GP_{7,2}$ terdapat pada Gambar 3.



Gambar 3. Ilustrasi dekomposisi (a, d)-P_4-antiajaib super pada $GP_{5,2}$ dan $GP_{7,2}$ dengan d = 3.

TEOREMA 4 *Pada Graf Generalized Petersen* $(G\,P_{n,2})$ *terdapat dekomposisi selimut* $\left(\frac{1}{2}(25n+11),4\right)$*-$P_4$-antiajaib super.*

Bukti. Setiap titik dan sisi dipetakan ke himpunan bilangan bulat positif oleh fungsi f_u seperti pelabelan di bawah ini,

$$f_u(v_i) = \begin{cases} \frac{1}{2}(3n-i) & \text{untuk } i \in [1, n-2], i \text{ ganjil} \\ \frac{1}{2}(4n-i) & \text{untuk } i \in [2, n-1], i \text{ genap} \\ 2n & \text{untuk } i = n \end{cases}$$

$$f_u(u_i) = \begin{cases} n & \text{untuk } i = 1 \\ i-1 & \text{untuk } i \in [2, n] \end{cases}$$

$$f_u(u_i u_{(i+2) mod\, n}) = \begin{cases} 5n & \text{untuk } i = 1 \\ 4n-1+i & \text{untuk } i \in [2, n] \end{cases}$$

$$f_u(v_i v_{(i+1) mod\, n}) = 2n+i \qquad \text{untuk } i \in [1, n]$$

$$f_u(u_i v_i) = \begin{cases} 4n & \text{untuk } i = 1 \\ 3n+(i-1) & \text{untuk } i \in [2, n] \end{cases}$$

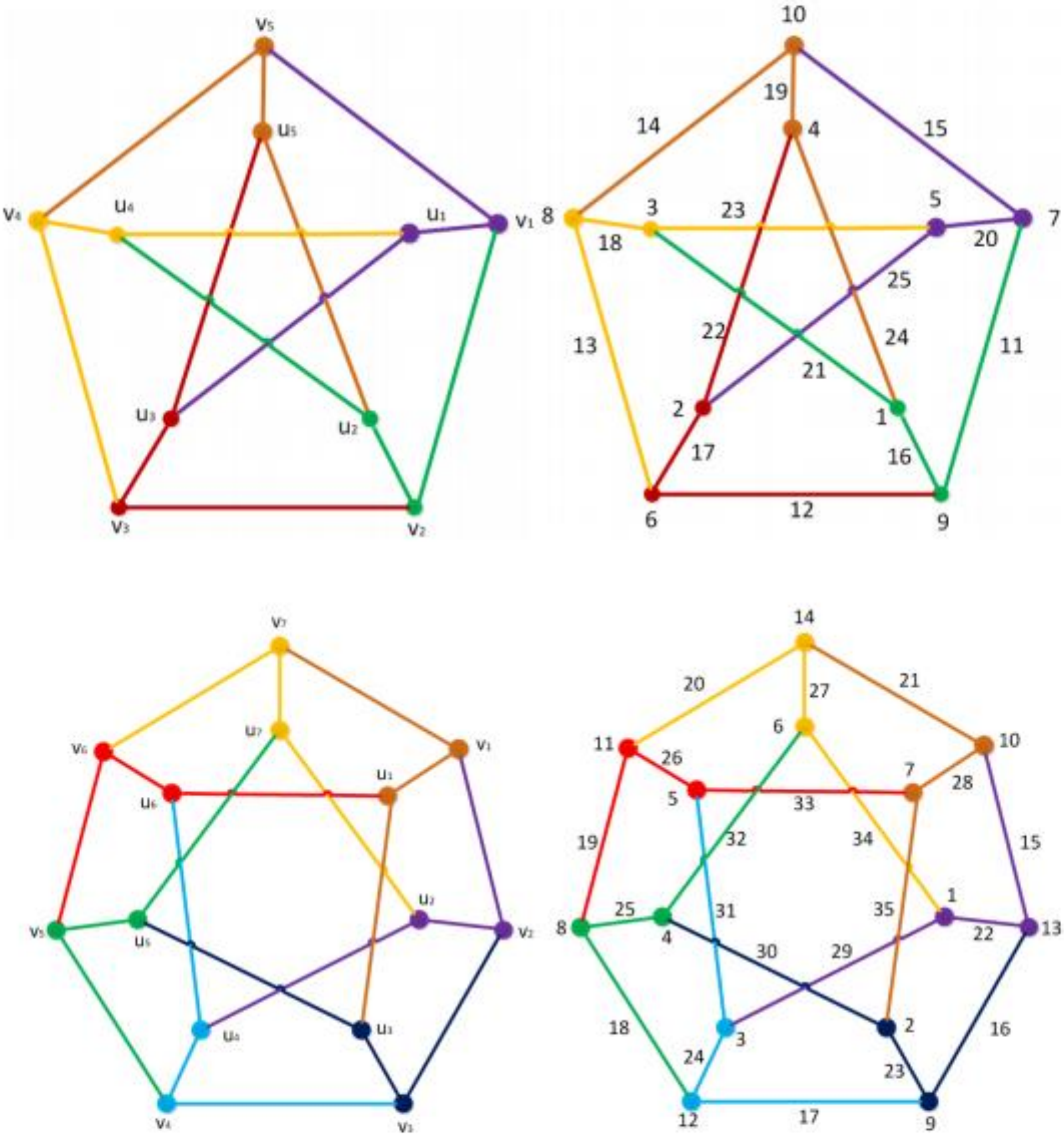
Pola bobot $\left(w(P_4^i)\right)$ masing-masing selimut pada graf *generalized* Petersen adalah sebagai berikut:

$$w(P_4^i) = \begin{cases} f_u(u_2) + f_u(u_{(i+1)}) + f_u(v_{(i+1)}) + f_u(v_i) + f_u(u_{(i+1)}u_2) \\ \quad + f_u(u_{(i+1)}v_{(i+1)}) + f_u(v_i v_{(i+1)}), \text{untuk } i = n-1 \\ f_u(u_1) + f_u(u_{(i+1)}) + f_u(v_{(i+1)}) + f_u(v_i) + f_u(u_{(i+1)}u_1) \\ \quad + f_u(u_{(i+1)}v_{(i+1)}) + f_u(v_i v_{(i+1)}), \text{untuk } i = n-2 \\ f_u(u_{(i+1)}) + f_u(u_{(i+3)}) + f_u(v_{(i+1)}) + f_u(v_i) + f_u(u_{(i+1)}u_{(i+3)}) \\ \quad + f_u(u_{(i+1)}v_{(i+1)}) + f_u(v_i v_{(i+1)}), \text{untuk } i = [1, n-3] \\ f_u(u_1) + f_u(u_3) + f_u(v_1) + f_u(v_i) + f_u(u_1 u_3) \\ \quad + f_u(u_1 v_1) + f_u(v_i v_1), \text{untuk } i = n \end{cases}$$

Berdasarkan pola bobot pelabelan di atas diperoleh $w(P_4^i)$ masing-masing selimut (P_4) pada graf *generalized* Petersen adalah sebagai berikut:

$$w(P_4^i) = \begin{cases} \frac{1}{2}(25n+8i+3) & \text{untuk } i \in [1, n-3] \\ \frac{1}{2}(27n+6i-1) & \text{untuk } i = n-2 \\ \frac{1}{2}(26n+7i+2) & \text{untuk } i = n-1 \\ \frac{1}{2}(31n+2i+3) & \text{untuk } i = n \end{cases}$$

Berdasarkan bobot selimut $w\left(P_4^i\right)$ di atas diperoleh dekomposisi (a,d)-P_4-antiajaib super pada graf *generalized* Petersen $(G\,P_{n,m})$ dengan $n \geq 5$, n ganjil dan $m = 2$, dengan $a = \frac{1}{2}(25n + 11)$ dan $d = 4$. Ilustrasi dekomposisi (a,d)-P_4-antiajaib super dengan $d = 4$ pada graf generalized Petersen $GP_{5,2}$ dan $GP_{7,2}$ terdapat pada Gambar 4.



Gambar 4. Ilustrasi dekomposisi (a,d)-P_4-antiajaib super pada $GP_{5,2}$ dan $GP_{7,2}$ dengan $d = 4$.

Dari keempat teorema yang telah dipaparkan, diperoleh empat jenis nilai a yang sesuai dengan nilai d. Tabel 1 menyajikan eksistensi nilai a dari keempat teorema di atas.

d / $GP_{n,2}$	1	2	3	4
$GP_{5,2}$	74	72	70	68
$GP_{7,2}$	102	99	96	93
$GP_{9,2}$	130	126	122	118
$GP_{11,2}$	158	153	148	143
$GP_{13,2}$	186	180	174	168
$GP_{15,2}$	214	207	200	193
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$GP_{n,2}$	$14n+4$	$\frac{1}{2}(27n+9)$	$13n+5$	$\frac{1}{2}(25n+11)$

KESIMPULAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan diperoleh kesimpulan bahwa graf *generalized* Petersen dengan n ganjil, $n \geq 5$ dan $m = 2$, memiliki dekomposisi (a, d) -P_4- antiajaib super dengan nilai a dan d yang berbeda seperti pada tabel di bawah ini. Pada penelitian ini dihasilkan empat teorema yang disesuaikan dengan nilai a dan d yang diperoleh dalam penelitian ini.

a	d
$14n+4$	1
$(27n+9)/2$	2
$13n+5$	3
$(25n+11)/2$	4

REFERENSI

[1] Harary, F. 1969. *Graph Theory*. Philipina: Addison- Wesley Publishing Company Inc.

[2] Hardsfields, N. dan Rigel, G. 1994. *Pearls in Graph Theory*. London: Accademic Press Limeted

[3] M.E. Watkins. 1969. A Theorem on Tait colorings with an application to the generalized Petersen graph, *J. Combin. Theory 6*, 152-164.

[4] Munir, Rinaldi. 2010, *Matematika Diskrit*, Edisi Ketiga. Bandung: Penerbit Informatika.

[5] Sungeng, K.A. 2005. *Magic and Antimagic Labeling of Graph*. Ph.D Thesis. School of Information Technology and Mathematical Science University of Ballarat.

[6] Nur Inayah, A.N.M. Salman, R. Simanjuntak. 2009. On $(a.d)$-H-antimagic Coverings of Graph. *The Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing* 71, 273-281.